

講義時間： 月曜日 8:30~10:00

講義予定日：別途通知

教科書： 堀・大西：制御工学の基礎，電気電子情報通信基礎コース，丸善(株)

参考書（制御工学第2の教科書）：

堀・大西：応用制御工学，電気電子情報通信基礎コース，丸善(株)

## 1. 序論

1. 1 制御工学とは何か
1. 2 制御システムの例，分類
1. 3 閉ループ制御と開ループ制御
1. 4 制御工学の歴史

## 2. システム動特性の表現

2. 1 信号伝達と状態遷移
2. 2 動作点まわりの線形化
2. 3 線形システムの表現
- (2. 4 ラプラス変換法の基礎)
2. 5 ブロック図とその合成
2. 6 特性の計測法

## 3. 制御システムの安定性

3. 1 線形システムの安定性
3. 2 ラウスの安定判別法
3. 3 ナイキストの安定判別法
3. 4 フィードバック系の安定度指標

## 4. フィードバック制御系の基本特性

4. 1 入力追従特性と外乱抑圧特性
4. 2 定常誤差と誤差係数
4. 3 2次系の過渡応答
4. 4 2次系の周波数応答
4. 5 高次系の代表根

## 5. 線形フィードバック系の補償

5. 1 フィードバック制御系設計の基本指針
5. 2 直列補償とフィードバック補償
- (5. 3 ニコルズ線図を用いた制御系設計)
5. 4 根軌跡を用いた制御系設計
5. 5 直列補償とPID調節計
5. 6 フィードバック補償

## 6. 制御工学第2への序章（古関）

古典的制御の復習と状態空間法との関係  
(フィードバック制御と多項式法など)  
状態空間におけるシステム序論  
(連続量と離散量)

# 制御工学第 1 (教科書の一部, 第 2 の内容も含む)

## 4. 自動制御

### 4. 1 自動制御の基礎

- 4. 1. 1 制御系の基本構成
- 4. 1. 2 制御系の分類と歴史
- 4. 1. 3 閉ループ制御と開ループ制御
- 4. 1. 4 システム動特性の表現  
(含 ラプラス変換法の基礎)
- 4. 1. 5 制御系の安定性

### 4. 2 フィードバック制御系の設計

- 4. 2. 1 フィードバック制御系の基本特性
- 4. 2. 2 2次系の性質
- 4. 2. 3 フィードバック制御系設計の基本指針
- 4. 2. 4 ニコルズ線図を用いた制御系設計
- 4. 2. 5 根軌跡を用いた制御系設計
- 4. 2. 6 PID調節計
- 4. 2. 7 フィードバック補償

### 4. 3 状態空間法

- 4. 3. 1 状態変数と状態方程式
- 4. 3. 2 状態方程式と伝達関数との相互変換
- 4. 3. 3 状態方程式の基礎的性質
- 4. 3. 4 状態フィードバック
- 4. 3. 5 最適制御
- 4. 3. 6 オブザーバ

### 4. 4 ロバスト制御

- 4. 4. 1 適応制御とロバスト制御
- 4. 4. 2  $H^\infty$ 制御の考え方
- 4. 4. 3  $H^\infty$ 制御問題の解とその意味
- 4. 4. 4  $\mu$ シンセシスとロバスト性能

(第 4 章になっているのはある事情のゆえであり, 気にしないでください。)

## 4. 1 自動制御の基礎

### 4. 1. 1 制御系の基本構成

われわれの身のまわりには、あらかじめ望ましいと定めた目標値に一致するようにうまく調節されているものがたくさんある。たとえば、車の速度を望みの値にすること、エアコンによって部屋の温度を調節すること、飛行機を落とさずに飛ばすこと、配電電圧を一定に保つことなど、数えあげればきりが無い。スキーで倒れないようにうまく滑り降りることができるし、動物の体温は外気温によらず一定であったり、物価がおおむね安定に保たれていたりする。この仕組みはいったいどうなっているのだろう。

#### (1) 巧妙なメカニズム

これらの裏には巧妙なメカニズム、すなわち、ある行動や現象の結果と目標に差がある場合、これをもとにもどす作用が働いていると考えられる。これをフィードバック (feedback) という。多くの場合、意味があるのは負のフィードバック (ネガティブフィードバック) である。目標と結果を比較し、その差を小さくするように働く機能のことである。

このメカニズムを、車の運転を例にとってもう少し詳しく説明してみよう。

目標速度は頭の中で作られる。速度計を読んでえられた車の実際速度と比較され、脳に送られる。速度が目標に達しなければアクセルを踏み、逆であればアクセルをゆるめる指令を足に出す。あるいはブレーキペダルを踏む。これによって車は加速されたり減速されたりし、その結果として実現される車速は再び速度計に現れる。そのようすを図1.1に示す。重要なことは信号 (情報) の流れが閉じたループを作っていることである。

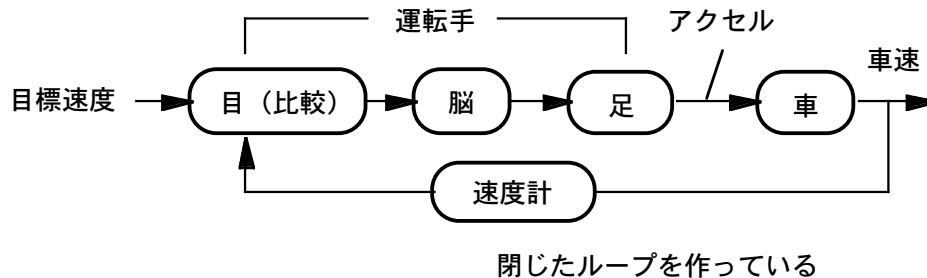


図1.1 車の運転

このような閉じた信号経路をもつシステムを、「閉ループ制御系 (closed loop control system)」といい、「フィードバック制御系 (feedback control system)」とほとんど同義である。家電でいえば、電気こたつ、冷蔵庫、エアコンなどがそうである。フィードバック制御は対象に予測し難い変化要因がある場合に適している。

一方、閉じた信号経路を持たなくても、立派に仕事をするシステムもある。「開ループ制御系 (open loop control system)」といい、「シーケンス制御系 (sequence control system)」と同義に使われることもある。信号の経路は一方であり、結果は原因に戻されない。動作はあらかじめ定められた順序に従って行われる。たとえば、洗濯機、炊飯器、パン焼器などがそうである。制御対象の性質を良く知っている場合に適しているが、詳しくは後述する。

JISの定義によれば、「制御」とは「ある目的に適合するように対象となっているものに所用の動作を加えること」、「自動制御」とは「制御を制御装置によって自動的に行うこと」である。この意味では、閉ループ

であろうと開ループであろうとともに「制御」である。また、両者は明確に区別できないこともある。

(2) フィードバック制御系の構成

図1.2に、一般的なフィードバック制御系の構成を示す。どのようなフィードバック制御系であっても、およそこのような構成となっている。

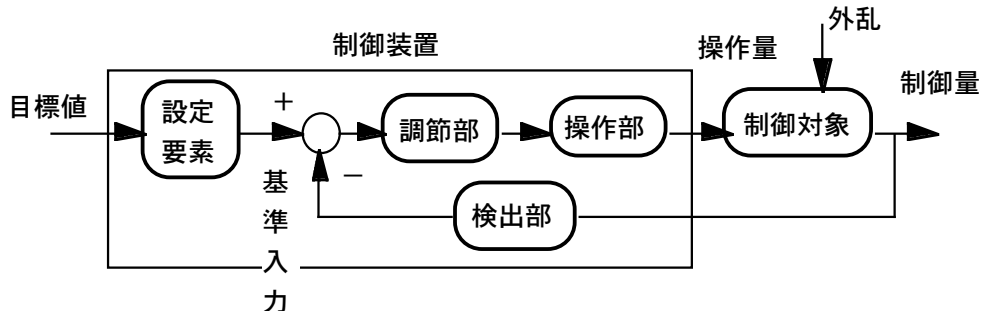


図1.2 フィードバック制御系の構成

各用語を簡単に説明しておこう。

- 設定要素： 目標値から基準入力をつくる部分。
- 調節部： PI制御器（後述）など制御動作を行う頭脳に当たる部分。
- 操作部： 弁，ポンプ，アクチュエータなど制御対象に働きかける部分。
- 制御対象： 制御される対象となるシステムで，車，ロボット，社会など。プラントということがある。
- 検出部： 信号を検出し，対応する電気信号に直したりする部分。いわゆるセンサである。
- 目標値： 制御量をもってゆきたい直接の目標となる値。
- 基準入力： 目標値を制御装置がわかる情報に変換したもの。
- 操作量： 制御対象への直接入力。モータであれば端子電圧がこれに当たる。
- 制御量： 制御したい量をいう。まちがえやすいので注意のこと。
- 外乱： 制御目的を邪魔しようとするもの。

例として、図1.3のような、赤外線ヒータなどを用いた、簡単な構造の昔の電気こたつをとりあげてみよう。

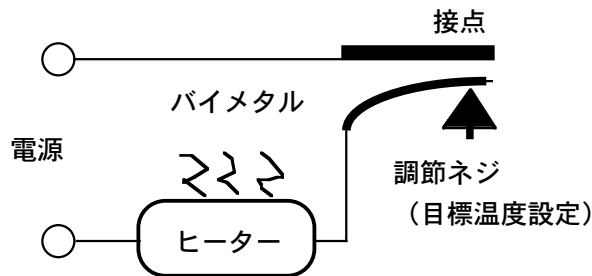


図1.3 こたつ

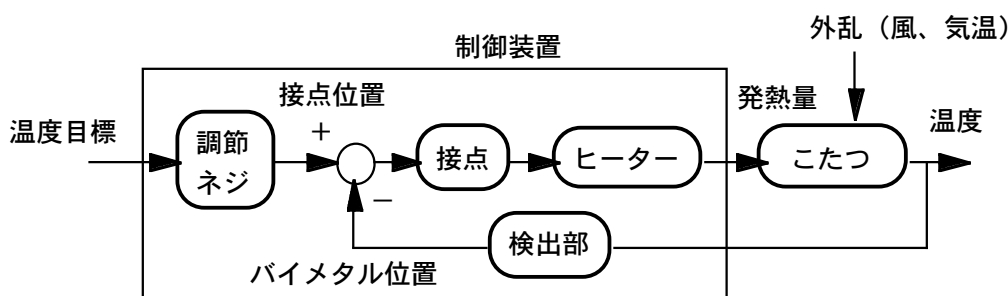


図1.4 こたつの制御系

こたつは、バイメタルという、2種類の膨張率の異なる金属をはり合わせたものを用いている。バイメタルは温度によって形状を変え、温度が上がると接点が開いてヒーターからの熱発生がなくなる。どのくらいの温度で接点が開くようにするかは、調節ネジによってバイメタルの位置を設定することで調整できる。このような簡単なシステムでも、フィードバック制御系としての要素を全部持っている。図1.4中の各部を一般的な制御系の用語（図1.2）と照合してみるとよい。

#### 4. 1. 2 制御工学の歴史と分類

制御工学 (controengineering) は、約100年前に生まれ、ここ50年ほどの間に体系化されてきた比較的新しい学問分野である。ここで、制御工学の歴史を簡単にまとめておこう。

##### (1) 制御工学の歴史

18世紀には蒸気機関を用いて蒸気船が作られたが、川の流速が変化すると、船の速度は大きく影響された。流速を測定して蒸気量を変えられればよいのだが、そのようなセンサーはなかった。

そこでガバナ（遠心调速機）というものが考えられた。その原理を図1.5に示す。回転数上昇が上昇すると遠心錘が開き、弁の開度を小さくする方向にフィードバックをかける。回転速度の目標値は、调速機のある部分の位置（基準入力）で設定され、実際の回転速度が一定に保たれる巧妙な仕組みを見ることができる。

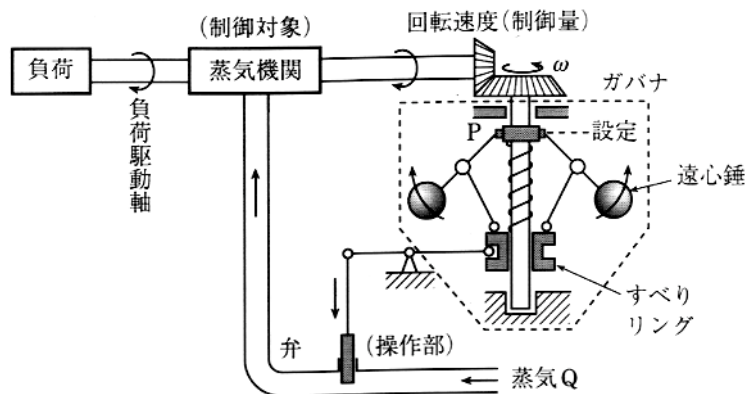


図1.5 遠心调速機

#### ・幕開け

1865~1870 ワット（蒸気機関と遠心调速機）

産業革命の原動力となったワットの蒸気機関はあまりにも有名であるが、それを支えた重要な制御技術として、ガバナ（遠心调速機）がある。これがフィードバック制御の始まりである。しだいに高まる速度の制御精度向上要求に対処するため、技術者は、遠心錘の感度を高くすることに腐心した。しかし、この方法ではシステムは振動的となりついには不安定となることがわかってきた。

1868 マクスウェル ("On Governors")

電磁気学で有名なマクスウェルは、ただ一つ残した制御の論文, "On Governors" (ガバナが複数形になっている) において、数多くのガバナを調べ、まず、蒸気機関の回転速度制御は遠心錘の改良だけではだめであることを指摘した。ガバナを含む複雑な非線形システムを思い切って線形化し、これを記述する微分方程式を導き、その安定性を議論しなければならないことを指摘した。システムが安定であるためには、特性方程式のすべての根が負の実数部をもたなければならないことを示した。

#### ・安定性の解析

マクスウェルは3次系について安定性の必要十分条件を導いたが、制御系に積分動作を持たせるなどして系の次数がもっと高くなった場合については完全に解くことができなかった。なお、当時から、積分要素をもった调速機をガバナと呼び、比例制御だけのものはモデレータと呼んでいることから、積分動作は本質的に何か異なるものであることが認識されていたようである。

さて、一般的な安定判別法の開発は、アダムズ賞の懸賞問題となった。このマクスウェルの呼びかけに答える形で多くの安定判別法が考案され、ラウスが勝利をおさめたのである。今日よく知られているものとして、

1877 ラウス (代数方程式の安定根存在の条件)

1892 リアプノフ (漸近安定性)

1895 フルヴィッツ (行列形式による安定判別)

などがあげられる。

#### ・古典制御理論の確立

実用的な自動制御理論が確立され、周波数領域での補償要素設計理論は、第2次世界大戦によって大きく進歩した。主なできごととしては、

1932 ナイキスト (フィードバック回路の安定性の図式判別)

1940 ボーデ (フィードバック回路の設計: ボーデ線図)

1941 ウィナー, コロモゴロフ (予測理論, 情報理論)

1948 エバンス (根軌跡法)

1948 ウィナー (サイバネティクスの提唱)

などがある。戦争の終わりとともに、制御工学の平和産業への応用が始まり、いわゆるオートメーションが発達した。

#### ・現代制御理論の誕生

1950年代に入ると、古典制御にかわって、時間領域での制御系設計、多入出力系の取り扱いを特徴とする現代制御理論が生まれた。主なできごとは、

1952 ベルマン (ダイナミックプログラミング)

1956 ポントリヤーギン (最大原理)

## 1960 カルマン（カルマンフィルタ，システム理論）

がある。とくに、カルマンは、状態変数，線形制御理論などの状態空間法を考案し，現代制御理論の基礎を築いた。

### ・その後～現代（ポスト現代制御理論）

現代制御理論は，それまでの古典制御理論が図形的な手法を主に用いてきたのに対し，数式を多用する代数的な手法であったため，現場の技術者に嫌われ，ここにいわゆる「理論と現実の乖離」が生じた。また何よりも現代制御理論は，制御対象の数式モデルが得られることを前提としたが，現実には，この要求は満たされないことが普通である。

このような反省から，モデル依存形制御理論からの脱却を目指した研究がさかんに行われるようになり，古典制御理論を包括する新しい制御理論として，周波数領域での最適化の数理，すなわち $H_\infty$ 最適制御理論が生まれた。その他にも，2自由度構造の再認識，大規模システムの制御，非線形システムの制御，デジタル制御系設計への新しい取り組み，学習・適応制御，AI・ファジー技術の応用などに著しい進展が見られている。

最近の制御理論研究の特徴は，高速計算機や大容量メモリが安価になって，便利なCADが手元で使用できるということである。数式を眺めながら，おのれの頭脳と洞察力のみを頼りとし，紙と鉛筆を使って理論を開発してきた時代とはずいぶん様子が違ってきている。

## （2）制御系の分類

制御系にはいろいろな種類があるが，その分類の方法もまたさまざまである。ここでは代表的なものをいくつかあげておこう。

### ・目標値の種類による分類

- |         |   |
|---------|---|
| 定値制御    | 目標値が一定の場合で，外乱抑圧が大切である。恒温槽の温度制御，発電機出力電圧制御などがこの例である。        |
| 追値制御    | 目標値が任意に変化，それを正確に追うことが主な目的となる。XYプロッタ，レーダーの自動追尾装置などがその例である。 |
| プログラム制御 | 目標値が定められた時間変化をするもので，ならい旋盤，簡単なロボットなどがこの例である。               |

### ・制御量の種類による分類

- |        |  |
|--------|--|
| プロセス制御 | 制御量が，温度，圧力，流量，液面，濃度，pHなど工業プロセスの状態量の場合で，定値制御がほとんどである。   |
| サーボ機構  | 制御量が物体の位置，回転角，姿勢などの機械的変位で，自動操縦，工作機械，照準装置，遠隔操作などにおいて，必須の技術である。追値制御がほとんどである。もともと自動制御はサーボ機構の研究から発生したものである。なお，servoの語源はservus（ラテン語）であり「奴隷」の意である。 |

### ・動作信号による分類

連続時間制御 システムを流れる信号が連続のもの。制御系の解析や設計には、ラプラス変換や連続時間状態方程式が用いられ、一般にアナログ制御となる。

離散時間制御 システムを流れる信号が不連続のもの。z変換や離散時間状態方程式が用いられ、一般に、計算機制御となる。サンプル値制御ともいう。非線形制御やテーブルを用いた制御など従来にない制御の可能性がある。最近では多重サンプル値制御に新しい成果がある。

参考 デジタル制御：振幅方向も離散化されているものをいうが、最近では離散時間制御系とあまり区別しないで用いることもある。

デジタル再設計：連続時間で設計した制御器を計算機にのせるために離散時間系に変換する手法を慣習的にこう呼んでいる。

確率制御 不規則信号（不規則な入力、ノイズ、外乱）がシステムに存在する場合の制御法で、統計学的な解析と設計を行うものである。カルマンフィルタはその一種である。

#### ・システムの機能による分類

閉ループ制御と開ループ制御 後ほどやや詳しく説明する。

適応制御 制御対象の内部構造やパラメータの変化に対して制御装置の制御構造を自動的にかえて常に最適な性能を実現するもの。セルフチューニングレギュレータ（STR）とモデル規範形適応制御（MRACS）とがある。

学習制御 過去の制御結果を蓄積し、何回も繰り返すうちにだんだんよい制御ができるようになるもので、くり返し制御はその一種である。最近ではニューラルネットワークが流行している。

予見制御 とくにサーボ機構において、目標値の未来値があらかじめ与えられている場合、それを利用して現在の制御入力を決めることにより性能向上をはかるものである。

#### 4. 1. 3 閉ループ制御と開ループ制御

さてここで、序論での重要な概念である閉ループ制御と開ループ制御の違いを、「風呂を沸かす」という制御を例にとって考えてみよう。

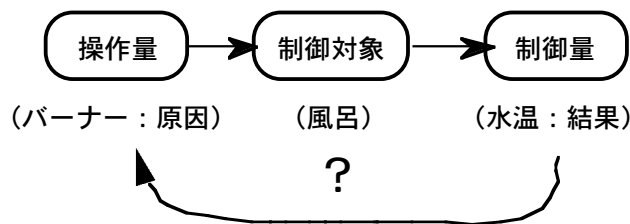


図1.6 風呂をわかすという制御

開ループ制御では、あらかじめ定めておいたプログラムに従って、バーナーを点火し、ある時間たったら消



火するということをする。ほとんどの人はそうやっているであろう。その利点は何といても「簡単である」ということである。これは工学システムにとっては重要かつ必要なことがらである。しかし、それだけであろうか。欠点の方はいくらかでも考えられる。加熱時間と水温の関係を調べておく必要がある。水の温度がかわったり、風呂をたいている途中で、周囲温度の変化など大きな外乱が加わったりすると、直接影響を受ける。加熱時間と水温の関係などは月日で予測するしかない。

ではこれを、閉ループ制御にしたらどうなるであろうか。バーナーを点火する、絶えず水温を測定する、目標温度より低ければたきつづけ、高くなれば消す。この方法の利点は、加熱時間と水温の関係は知らなくてもよいこと、途中で環境の変化がおこっても目的は達せられる、という点にある。

しかし、閉ループ制御には次のような欠点が考えられる。まず、水温の常時測定が必要である。水温を測定するのは意外と困難である。とくにこの場合は平均温度を測りたいのであるが、平均温度はどうやったら測れるだろう。スクリュウを用意してかき回すだけでもいいのだろうか。

また、結果が出てからでないでないと操作を変えられないので、制御が間に合わなくなるかも知れないという、閉ループ制御に共通の欠点も持っている。たとえば、炊飯器では、蓋をとって焚き具合を見なければならぬことになるが、これは好ましいことではない。よくわかったときにはもう遅い。赤子が泣いてもふたとるなと言われるように、ふたとるといっぺんに飯が不味くなって制御目的を達することができなくなる。

さらに、制御装置をうまくつくりないとシステムが不安定になることがある。つまり、制御量が発散する。これは操作と結果の時間遅れ（制御対象のダイナミクス）によって生ずる本質的なものである。フィードバック制御系設計の最大のポイントがここにある。すなわち、システムを不安定にしないで、いかに制御目的を達成する制御器を設計するか、ということが最も重要な問題なのである。

表1.1に開ループ制御と閉ループ制御の特徴をまとめておこう。

表1.1 開ループ制御と閉ループ制御

	開ループ制御	閉ループ制御
構成	簡単	複雑
安定性	問題なし	不安定になりがちである
応答	速い	遅れがある
精度	低い	高い
外乱	無防備	強い
結果の計測	不要	必要

#### 4. 1. 4 システム動特性の表現

制御系を設計していくためには、まず、制御対象となるシステムの特長、いわゆる動特性を、数学的に表現しておかなければ始まらない。

##### (1) ダイナミクス

制御工学で相手にする制御対象は、ダイナミクスを持っている。うがった言い方をすると、ダイナミクスとは「過去をおぼえている」ということである。システムの状態変化が、入力によって直ちに定まるのではなく、いまどのような状態にあるかにも影響されるようなシステムの性質をいう。

図1.7の2タンク系を考えてみよう。このシステムは、図1.8に示すように、「流量 $Q_0$ を変えて、2番目の水槽の有効水位 $h_2$ を調節する」ものである。

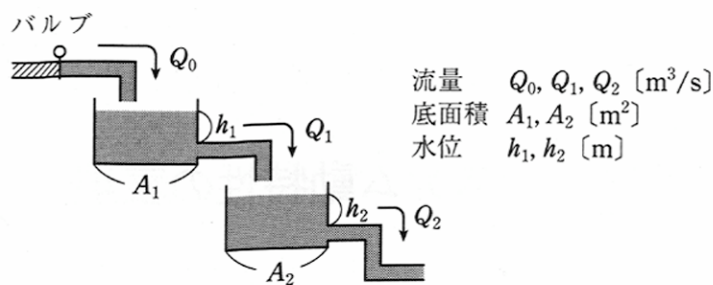


図1.7 2タンク系

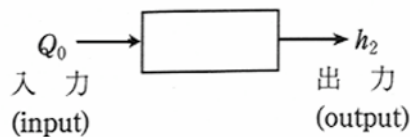


図1.8  $Q_0$ を変えて $h_2$ を調整する

トリチェリーおよびベルヌイの法則より、このシステムの特長は、

$$A_1 \frac{dh_1}{dt} = Q_0 - Q_1 = Q_0 - k_1 \sqrt{h_1} \quad (1.1)$$

$$A_2 \frac{dh_2}{dt} = Q_1 - Q_2 = k_1 \sqrt{h_1} - k_2 \sqrt{h_2} \quad (1.2)$$

という数式で表現できる。今後の水位がどのように変化していくかをこれらの式は表しているが、現在の水位に影響されている（すなわちダイナミクスがある）ことは明白である。

##### (2) 動作点まわりの線形化

2タンク系において、図1.9のような水位制御系を設計することを想定しよう。

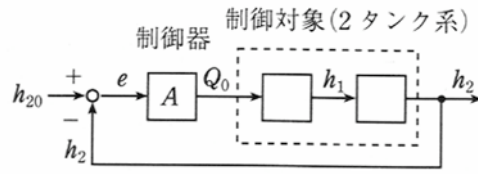


図1.9 2タンク系の水位制御系  
( $h_{20}$ は希望水位,  $e$ は誤差,  $A$ は増幅率を表わす。)

ここでは, 入力 (input) を 2 倍にすれば出力 (output) も 2 倍になるという, いわゆる「重ね合せの理 (principle of superposition)」は成立しないことは容易にわかる。つまり線形システムでない。

そこで, 図1.10のように動作点を設定し, そのまわりでの小さな変化を考察の対象にすることを考える。式(1.1)より,

$$\begin{aligned} A_1 \frac{dh_1}{dt} &= Q_0 - Q_1 \\ &= Q_{00} + \Delta Q_0 - k_1 \sqrt{h_{10} + \Delta h_1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

もし,

$$\left| \frac{\Delta h_1}{h_{10}} \right| \ll 1 \quad (1.4)$$

であれば, 式(1.3)に続けて,

$$\cong Q_{00} + \Delta Q_0 - k_1 \sqrt{h_{10}} - k_1 \sqrt{h_{10}} \frac{\Delta h_1}{2h_{10}} \quad (1.3')$$

となる。 $h_1 = h_{10} + \Delta h_1$  であるから,

$$A_1 \frac{d\Delta h_1}{dt} \cong Q_{00} + \Delta Q_0 - k_1 \sqrt{h_{10}} - \frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}}} \Delta h_1 \quad (1.5)$$

式(1.2)より, 全く同様にして

$$A_2 \frac{d\Delta h_2}{dt} \cong k_1 \sqrt{h_{10}} - k_2 \sqrt{h_{20}} + \frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}}} \Delta h_1 - \frac{k_2}{2\sqrt{h_{20}}} \Delta h_2 \quad (1.6)$$

となる。

ここで, 定常状態では,

$$A_1 \frac{d\Delta h_1}{dt} \cong Q_{00} - k_1 \sqrt{h_{10}} = 0 \quad (1.7)$$

となる。また,  $h_{20}$ は,  $h_2$ の目標値である。 $h_{10}$ は, 「出力が目標値に等しいとき,  $Q_1, Q_2$ がバランスする量」つまり,  $k_1 \sqrt{h_{10}} - k_2 \sqrt{h_{20}} = 0$  となるように設定すると, 式(1.5), (1.6)は,

$$A_1 \frac{d\Delta h_1}{dt} \cong \Delta Q_0 - \frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}}} \Delta h_1 \quad (1.8)$$

$$A_2 \frac{d\Delta h_2}{dt} \cong \frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}}} \Delta h_1 - \frac{k_2}{2\sqrt{h_{20}}} \Delta h_2 \quad (1.9)$$

となる。

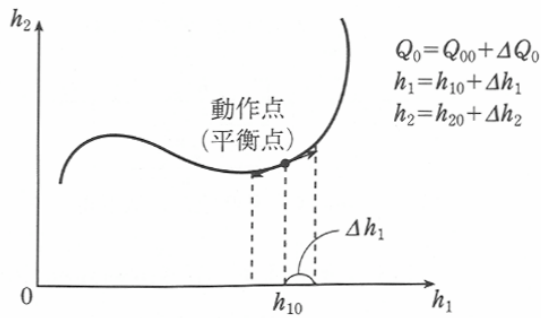


図1.10 動作点回りの小さな変化を考える

この手法を動作点まわりの線形化といい、 $\Delta Q_0$ を制御入力とし、 $\Delta h_2$ を制御量とする線形システムが得られる。

なお、式(1.8), (1.9)は、入力を右辺にまとめて、

$$A_1 \frac{d\Delta h_1}{dt} + \frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}}} \Delta h_1 = \Delta Q_0 \quad (1.8')$$

$$A_2 \frac{d\Delta h_2}{dt} + \frac{k_2}{2\sqrt{h_{20}}} \Delta h_2 = \frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}}} \Delta h_1 \quad (1.9')$$

と書くことが多い。これを図1.11に示す。

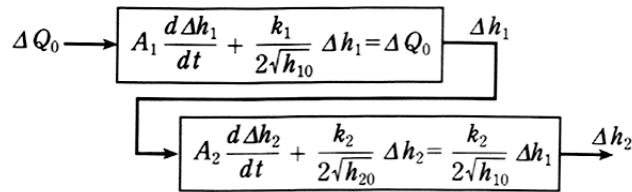


図1.11 最終的に得られた線形化システム

2タンク系は、いわゆる一般の非線形システムであるが世の中にははじめから線形システムとして扱ってよいものも多い。たとえば図1.12は直線運動をする機械系（バネ・マス・ダンパ系）であるが、この系に入力として外力 $f(t)$ を加えて運動させたときの物体の変位 $x(t)$ を出力とすれば、入出力関係は次のように、線形の微分方程式で表わすことができる。

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + D \frac{dx(t)}{dt} + K x(t) = f(t) \quad (1.10)$$

ただし、 $M$ は物体の質量、 $D$ はダンパーの制動係数、 $K$ はばね定数である。

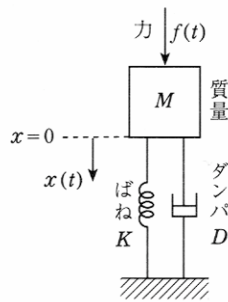


図1.12 バネ・マス・ダンパ系

(3) 線形システムの表現

前節では微分方程式によって線形システムを表現したが、さらにすすんで制御工学でよく用いる最も重要な、三つの線形システムの表現法を説明する。すなわち、

- ・ 伝達関数  $G(s)$
- ・ インパルス応答  $g(t)$
- ・ 周波数応答  $G(j\omega)$

であり、これらの間には次のような関係がある。

$$G(s) = \int_0^{\infty} g(\tau)e^{-s\tau}d\tau \tag{1.11}$$

$$G(j\omega) = G(s) |_{s=j\omega} \tag{1.12}$$

実際には、システムに理想的なインパルス ( $\delta$ -function) を送って応答を見ることは極めて困難であるから、ステップ応答から計算する。もともとインパルス応答は仮想的なものである。

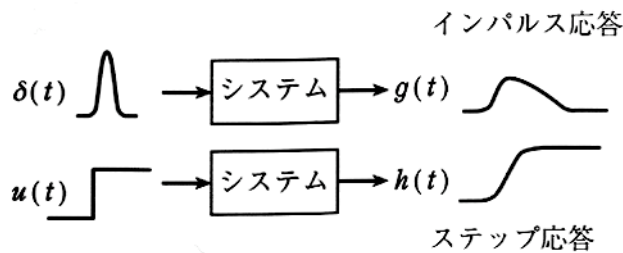


図1.13 インパルス応答とステップ応答

先に例を示せば、式(1.8)をラプラス変換（後述）することにより、

$$G(s) = \frac{\Delta h_1}{\Delta Q_0} = \frac{1}{A_1s + \frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}}}} \tag{1.13}$$

これより、インパルス応答は、

$$g(\tau) = \frac{1}{A_1} \exp\left(-\frac{k_1}{2\sqrt{h_{10}A_1}} \tau\right) \quad (1.14)$$

となる。

微分方程式による制御系の表現は、他の表現法の基礎であって非常に重要ではある。しかし、そのままでは取り扱いにくく、制御系の解析や設計には必ずしも便利なものではない。

この欠点を補い、代数的関係によって制御系の入出関係を表現するのが、伝達関数である。伝達関数は、入出力信号のラプラス変換の比によって定義する。したがって、ここではまず、必要な範囲のラプラス変換について説明しておく。

#### (4) ラプラス変換法の基礎

ある時間の関数 $f(t)$ に対するラプラス変換 (Laplace transformation) は次の定積分によって定義される。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (1.15)$$

ただし、 $t < 0$ のとき $f(t)=0$ とする。 $s$ は、 $s=\sigma+j\omega$ なる複素数

記号表記として、

$$F(s) = \mathbf{L} [f(t)] \quad (1.16)$$

とも書く。時間 $t$ の関数を、周波数 $s$ の関数に変換しているわけである。

逆に、周波数関数を時間関数に変換する、ラプラス逆変換があり、

$$f(t) = \mathbf{L}^{-1} [F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (1.17)$$

という複素積分として与えられる。

式(1.15)の定義式に従って、いくつかの簡単な関数のラプラス変換を求めてみよう。

#### ・単位階段関数 (unit step function)

図1.14のように、

$$\begin{cases} f(t) = 1 & t \geq 0 \\ f(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.18)$$

である関数を単位階段関数というが、そのラプラス変換は次のようになる。

$$\mathbf{L} [f(t)] = \int_0^{\infty} u(t) e^{-st} dt = \left[ \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{e^{-\infty}}{-s} - \frac{e^0}{-s} = \frac{1}{s} \quad (1.19)$$

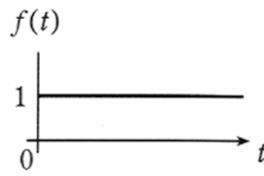


図1.14 ステップ関数

・ 指数関数 (exponential function)

$$f(t) = e^{-\alpha t} \quad (1.20)$$

のとき,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[e^{-\alpha t}] &= \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+\alpha)t} dt \\ &= \left[ \frac{e^{-(s+\alpha)t}}{-(s+\alpha)} \right]_0^{\infty} = 0 - \frac{e^0}{-(s+\alpha)} = \frac{1}{s+\alpha} \end{aligned} \quad (1.21)$$

・ 三角関数 (trigonometrical function)

$$f(t) = \sin \beta t \quad (1.22)$$

のとき,

$$\begin{aligned} \mathbf{L}[\sin \beta t] &= \int_0^{\infty} \sin \beta t e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}}{2j} e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{2j} \left\{ \int_0^{\infty} e^{(j\beta-s)t} dt - \int_0^{\infty} e^{-(j\beta+s)t} dt \right\} = \frac{1}{2j} \left\{ \left[ \frac{e^{(j\beta-s)t}}{j\beta-s} \right]_0^{\infty} - \left[ \frac{e^{-(j\beta+s)t}}{-(j\beta+s)} \right]_0^{\infty} \right\} \\ &= \frac{1}{2j} \left\{ -\frac{1}{j\beta-s} - \frac{1}{j\beta+s} \right\} = \frac{1}{2j} \frac{2j\beta}{s^2+\beta^2} = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \end{aligned} \quad (1.23)$$

また,

$$f(t) = \cos \beta t \quad (1.24)$$

のときも,  $\sin \beta t$  のときと同様にして,

$$\mathbf{L}[\cos \beta t] = \int_0^{\infty} \cos \beta t e^{-st} dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}}{2} e^{-st} dt = \dots = \frac{s}{s^2+\beta^2} \quad (1.25)$$

となる。いずれも, ラプラス変換で取り扱う時間関数は  $t < 0$  のとき  $f(t) = 0$  となっていることには注意してほしい。

・ 単位傾斜関数 (unit ramp function)

図1.15のように,

$$\begin{cases} f(t) = t & t \geq 0 \\ f(t) = 0 & t < 0 \end{cases} \quad (1.26)$$

である関数を単位傾斜関数（ランプ関数）というが、そのラプラス変換は、

$$\mathbf{L}[t] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left[ \frac{e^{-st}}{-s} t \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt = 0 - \left[ \frac{1}{-s} \frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2} \quad (1.27)$$

となる。

途中の計算はそれほど簡単ではないが結果はいたって簡単な形となる。

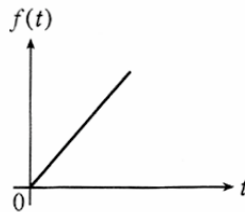


図1.15 単位傾斜関数（ランプ関数）

主な関数のラプラス変換を表1.2に示す。

表1.2 ラプラス変換表

	$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$
単位ステップ	1	$\frac{1}{s}$
デルタ関数, 単位インパルス	$\delta(t)$	1
指数関数	$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$
正弦波	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{s^2 + \beta^2}$
余弦波	$\cos \beta t$	$\frac{s}{s^2 + \beta^2}$
減衰正弦波	$e^{-at} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(s+a)^2 + \beta^2}$
減衰余弦波	$e^{-at} \cos \beta t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \beta^2}$
単位ランプ	$t$	$\frac{1}{s^2}$
$t$ の多項式	$t^n$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

次にラプラス変換に関する主な定理を列記しておこう。

- ・ 常数定理

$$\mathbf{L}[a f(t)] = a \mathbf{L}[f(t)] \quad (1.28)$$

- ・ 加法定理

$$\mathbf{L}[f_1(t) \pm f_2(t)] = \mathbf{L}[f_1(t)] \pm \mathbf{L}[f_2(t)] \quad (1.29)$$

- ・ 微分定理

$$\mathbf{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n \mathbf{L}[f(t)] - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0+) \quad (1.30)$$

とくに、



$$\mathbf{L} \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = s \mathbf{L} [f(t)] - f(0+) \quad (1.31)$$

・積分定理

$$\mathbf{L} \left[ \int \dots \int f(t) (dt)^n \right] = \frac{\mathbf{L} [f(t)]}{s^n} + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(0+)}{s^{n-k+1}} \quad (1.32)$$

・  $t$ -領域での推移定理 (図1.16)

無駄時間の表現である。

$$\mathbf{L} [f(t-a)] = e^{-as} \mathbf{L} [f(t)] \quad (1.33)$$

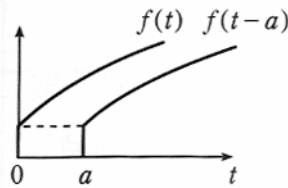


図1.16  $t$ -領域での推移

・結合定理 ( $s$ -領域での積, たたみ込み積分)

ラプラス変換のありがたさは, まさにこの定理にある。

$$\mathbf{L} \left[ \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \right] = \mathbf{L} [f_1(t)] \mathbf{L} [f_2(t)] \quad (1.34)$$

・最終値定理 (final value theorem)

$sF(s)$ が $s$ 平面の虚軸および右半面で正則であるとき,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (1.35)$$

ラプラス逆変換 (Inverse Laplace Transformation) は式(1.17)の複素積分で与えられるが, 線形集中定数系の場合は,  $F(s)$ は一般に

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.36)$$

のように $s$ に関する有理関数となるので, 式(1.17)を直接に計算することはなく, 以下に述べるような方法で求めるのが普通である。

式(1.36)の分母=0の根 (すなわち $F(s)$ の極) がすべて $s_1, s_2, \dots, s_n$ のように相異なる単根である場合, 式(1.36)は

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-s_1)(s-s_2) \dots (s-s_n)} \quad (1.37)$$

となり, これはさらに

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{C_1}{s-s_1} + \frac{C_2}{s-s_2} + \dots + \frac{C_n}{s-s_n} \quad (1.38)$$

と部分分数に展開できる。ここで  $C_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) は  $s_k$  に対する留数であり、次のようにして求めることができる。(ヘビサイドの展開定理という。)

式(1.38)の両辺に  $(s-s_k)$  をかけると

$$(s-s_k) \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{C_1}{s-s_1} (s-s_k) + \frac{C_2}{s-s_2} (s-s_k) + \dots + C_k + \dots + \frac{C_n}{s-s_n} (s-s_k) \quad (1.39)$$

となる。この式において  $s=s_k$  とおくと  $C_k$  は

$$C_k = \left[ (s-s_k) \frac{B(s)}{A(s)} \right]_{s=s_k}, \quad k=1, 2, \dots, n \quad (1.40)$$

となることがわかる。このようにして  $C_k$  が求まると、ラプラス逆変換より、時間関数が

$$f(t) = C_1 e^{s_1 t} + C_2 e^{s_2 t} + \dots + C_n e^{s_n t} \quad (1.41)$$

と得られる。

なお、 $F(s)$  が

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{B(s)}{(s-s_1)^m (s-s_2) \dots (s-s_q)} \quad (1.42)$$

のように重根をもつ場合は、

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{C_{11}}{s-s_1} + \frac{C_{12}}{(s-s_1)^2} + \dots + \frac{C_{1m}}{(s-s_1)^m} + \frac{C_2}{s-s_2} + \dots + \frac{C_q}{s-s_q} \quad (1.43)$$

という部分分数展開になり、係数、 $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{1m}$  を求める公式が知られているが紙面の都合で省略する。

## (5) 伝達関数

線形システムの入出関係は一般に  $n$  階の微分方程式で記述されるが、すべての初期値を零としてこれをラプラス変換すると次のような  $s$  に関する代数方程式になる。

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0) Y(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0) U(s) \quad (1.44)$$

ただし、 $L[u(t)] = U(s)$ ,  $L[y(t)] = Y(s)$  としている。

これより、系の入出力関係は、

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (1.45)$$

と表わすことができる。 $s$  に関する有理式である右辺を、

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (1.46)$$

とおき、これを伝達関数 (transfer function) という。すなわち伝達関数とは、すべての初期値を零としたときの、出力信号と入力信号とのラプラス変換の比である。

例として、図1.12の機械系の伝達関数表現を求めてみよう。まず式(1.10)を再掲すると、

$$M \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + D \frac{dx(t)}{dt} + K x(t) = f(t) \quad (1.47)$$

これをラプラス変換する (初期値はすべて零とする) と次のようになる。

$$\begin{aligned} M s^2 X(s) + D s X(s) + K X(s) &= F(s) \\ \therefore (M s^2 + D s + K) X(s) &= F(s) \end{aligned} \quad (1.48)$$

(ただし、 $L[x(t)] = X(s)$ ,  $L[f(t)] = F(s)$ としている。)

従って、入力 $F(s)$ から出力 $X(s)$ までの伝達関数は、

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M s^2 + D s + K} \quad (1.49)$$

と表わされる。

## (6) 周波数応答

線形システムにある振幅と周波数の正弦波を入力するとき、出力にはどのような応答が得られるだろうか。簡単のため、その線形システムの入出力関係を表す伝達関数が式(2.51)で与えられる場合を考えてみよう。

入力 $U(s)$ は正弦波であるので $u(t) = A e^{j\omega t}$ である ( $A > 0$ )。定常状態に落ち着いたとき、出力は、

$$y(t) = B e^{j(\omega t + \theta)} \quad (B > 0) \quad (1.50)$$

になる。ラプラス領域で演算子 $s$ をかけることと、時間領域で時間微分することとは同じであることから、式(1.44)は時間領域では次の式となる。

$$\begin{aligned} &\{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_0\} A e^{j\omega t} \\ &= \{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_0\} B e^{j(\omega t + \theta)} \end{aligned} \quad (1.51)$$

辺々 $e^{j\omega t}$ で除して整理すると、

$$\frac{B}{A} e^{j\theta} = \frac{b_m (j\omega)^m + b_{m-1} (j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 (j\omega) + b_0}{a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 (j\omega) + a_0} \quad (1.52)$$

これを周波数応答関数という、伝達関数式(1.46)と比較すると

$$\frac{B}{A} e^{j\theta} = G(s)|_{s=j\omega} \quad (1.53)$$

となっていることがわかる。

このように伝達関数は周波数応答関数と1対1の関係がある。もともと伝達関数はラプラス領域で定義されているが、ラプラス変換の $s$ を $j\omega$ に置き直すとフーリエ変換になる。しかもフーリエ級数の周期を無限大にして通常の時間関数（たいていは非周期関数）を取り扱えるようにしたのである。

さて、式(1.53)より、

$$\frac{B}{A} = |G(j\omega)| \quad (1.54)$$

$$\theta = \arg G(j\omega) \quad (1.55)$$

になる。式(1.54)をゲイン (gain, 利得または振幅特性) といい、式(1.55)を位相 (phase) という。ゲインと位相はともに角周波数 $\omega$ の関数になる。 $\omega$ に対するゲインや位相の変化をそれぞれ、ゲイン特性、位相特性といい、両者を合わせて周波数特性という。周波数特性は実測しやすく、また図示すると一目でその系の特性が読み取れるので便利である。そのため、さまざまな表現法が工夫されている。以下に、その中の代表的なものを説明しよう。

#### ・ ボーデ線図

周波数特性を、ゲインと位相の両方で別々の図に表現する方法である。角周波数は $\log \omega$ を横軸にとる。ゲイン特性は縦軸に $20 \log |G(j\omega)|$ にとりデジベル(dB)表示する。デジベル表示は $\log |G(j\omega)|^2$ を10倍したものであるから実はエネルギー伝送のようすを表しているとも考えられる。このような表示は周波数や音圧に対して人間の感覚が対数的になっていることにも関係がある。位相特性はそのまま縦軸に位相を度 (degree, °) またはラジアン (radian) で表す。

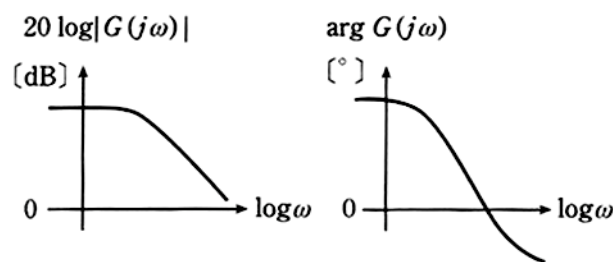


図1.17 ボーデ線図

図1.17のように、 $\omega$ の高域でゲインが下降する特性を低域通過特性というが、ボーデ線図は周波数に対するゲインと位相の特性が明確である。また、伝達関数が後述の図1.20のように直列に接続されている場合は、ゲイン、位相ともボーデ線図上では和になる（つまり、ゲインや位相をそれぞれ上下させるだけでよい）ので非常に便利である。

#### ・ ベクトル軌跡

周波数特性は複素数になるので、これを実部と虚部に分けて考え、周波数をパラメータにして複素平面上に軌跡を描いたものである。

$$G(j\omega) = x(j\omega) + jy(j\omega) \tag{1.56}$$

を描くので、振幅と位相は、

$$|G(j\omega)| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1.57}$$

$$\arg G(j\omega) = \tan^{-1} \frac{y}{x} \tag{1.58}$$

である。

ベクトル軌跡は周波数が陽に表示されていないという欠点があるが、ゲインと位相の両方が同時に表示されるので便利である。後述するナイキスト線図はベクトル軌跡の一種である。

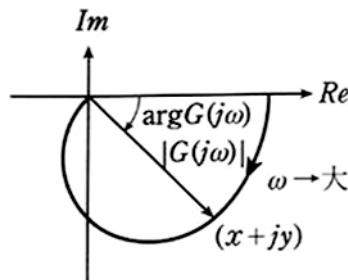


図1.18 ベクトル軌跡

・ゲイン・位相線図

これは周波数特性をゲインを縦軸に、位相を横軸に描いたものである。ただし、ゲインは対数をとってデシベル表示にする。やはり、周波数がパラメータとして扱われるので陽に現れないが、ゲインと位相が同時に表現でき設計に大変便利である。後述するニコルズ線図はこの代表である。

周波数特性はゲインと位相の周波数依存性を表している。しからは、この両者はお互いに独立に指定できるのだろうか。実は、最小位相推移系 (minimum phase-shift system :  $G(s)$ が  $s$  平面の右半面に極や零点を持たないシステム) では、次のような性質が知られている。

- (1) 位相特性はボーデ線図におけるゲイン特性の傾きの関数となり、傾きが大きい所では位相が大きく変化する。
- (2) ある周波数範囲でゲイン特性を、その周波数範囲外では位相特性を決定すると、はじめの周波数範囲で位相特性が、残りの周波数範囲ではゲインが決定される。

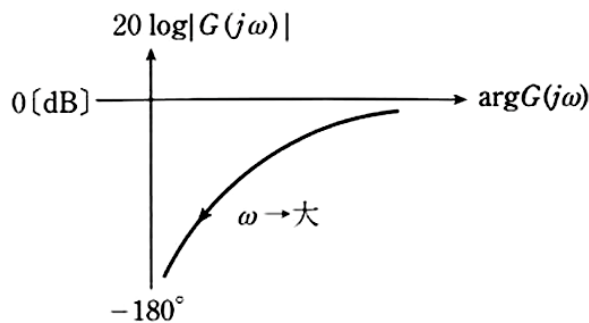


図1.19 ゲイン・位相線図

(7) ブロック図とその合成

伝達関数の優れた点のひとつは、いくつかの伝達関数ブロックがあるとき、その合成が簡単に求められるということである。以下にいくつかの例を示そう。

・直列接続

直列接続の場合は、単なる積になる。

$$\begin{aligned} Y(s) &= G_1(s) X(s) \\ Z(s) &= G_2(s) Y(s) \\ \therefore Z(s) &= G_2(s)G_1(s)X(s) \end{aligned} \tag{1.59}$$

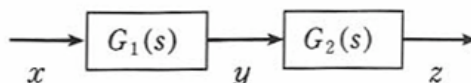


図1.20 直列接続

・並列接続

並列接続の場合は和である。

$$\begin{aligned} Z_1(s) &= G_1(s)X(s) \\ Z_2(s) &= G_2(s)X(s) \\ \therefore Z(s) &= (G_1(s) + G_2(s))X(s) \end{aligned} \tag{1.60}$$

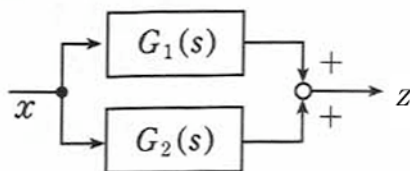


図1.21 並列接続

・フィードバック系

図1.22は、室温  $T$  を目標温度  $T_0$  に設定するシステムの模式図である。フィードバック要素はいまの場合、 $H(s)=1$  の単なる温度センサーである。これと目標温度との誤差を、 $G_1(s)$  に入力する。 $G_1(s)$  は、制御器と操作器を含んでいる。ここでは、操作器はヒータであり、制御器はヒータへ信号を送る機構である。 $G_2(s)$  は、ヒータの熱量が制御対象に与える影響を表わす伝達関数であり、室内の空気の温度が制御対象である。

このシステムの特性を計算してみよう。

$$\begin{aligned} E(s) &= T_0(s) - H(s)T(s) \\ &= T_0(s) - H(s)G_1(s)G_2(s)E(s) \end{aligned} \tag{1.61}$$

$$\therefore E(s) = \frac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} T_0(s) \tag{1.62}$$

従って、

$$\begin{aligned} T(s) &= G_1(s)G_2(s)E(s) \\ &= \frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)} T_0(s) \end{aligned} \tag{1.63}$$

となる。ここに、 $G_1(s)G_2(s)H(s)$ のことを、オープンループ伝達関数、または一巡伝達関数という。式(1.63)はよく利用したいへん重要な式であるから、暗記しておくといよい。 $T_0$ から $T$ までに入る伝達関数の積が分子に、 $1+$ 一巡伝達関数が分母に来る。符号は重ね合わせ点の符号に対応している。

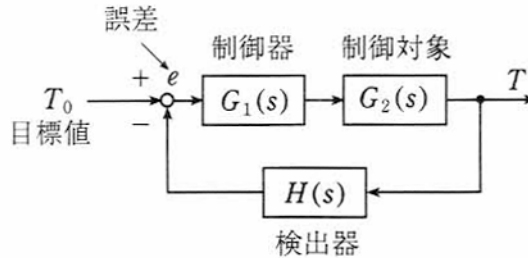


図1.22 フィードバック制御系

(8)  $G(j\omega)$ の折線近似

伝達関数の $s$ を $j\omega$ でおきかえれば周波数応答が得られ、先に述べたように、ボーデ線図 (Bode diagram) を描くことができる。

たとえば、一次遅れ系

$$G(s) = \frac{A}{1+Ts} \quad , \quad G(j\omega) = \frac{A}{1+j\omega T} \quad (1.64), (1.65)$$

の場合、

$$20 \log |G| = 20 \log A - 20 \log |1+\omega^2 T^2|^{1/2} \quad (1.66)$$

$$\arg G = -\tan^{-1} \omega T \quad (1.67)$$

である。

ボーデ線図では広い周波数にわたって $G(j\omega)$ の特性を見るために、横軸を $\omega$ ではなく $\log \omega$ でとる。さらに、振幅だけを描き、偏角 (位相) は記さないことも多い。これは、最小位相推移系では、ゲイン特性が決まれば位相特性は一意に決まることがボーデの定理として知られているからである。

一般に、零点が右平面にある非最小位相推移系では、系は安定ではあるが図1.23のような逆応答を示すようになる。このような応答はしばしば経験するものであるが、取り扱いが面倒になるので、ここでは最小位相推移系の伝達関数だけを扱うことにしよう。

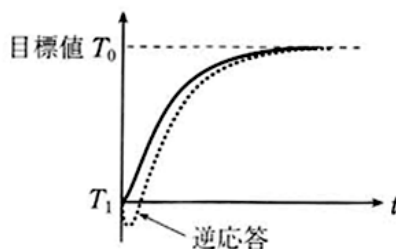


図1.23 逆応答

さて一次遅れ系のボーデ線図は図1.24のようになる。式(1.66)の第2項は、 $\omega T \ll 1$ のとき、 $20 \log |1| =$

0,  $\omega T \gg 1$  のとき,  $|1 + \omega^2 T^2| \sim \omega^2 T^2$  であるから,  $-20 \log T - 20 \log \omega$  となる。ボーデ線図の横軸は  $\log \omega$  だから, これは傾きが  $-20$  のグラフになる。 $\log_{10} X$  は  $X$  が 10 倍になるごとに目盛が 20 進む。これを decade と呼ぶ。また  $X$  が 2 倍になると約  $6.02$  [dB] 進む。これを オクターブ と呼んでいる。

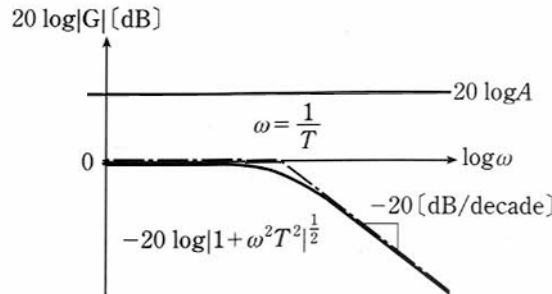


図1.24 1次の伝達関数の振幅特性

図1.24において正確な特性は太線のようになるが, これを一点鎖線のような折線で近似できる。これを「折線近似」と呼ぶ。その結果が図1.25である。

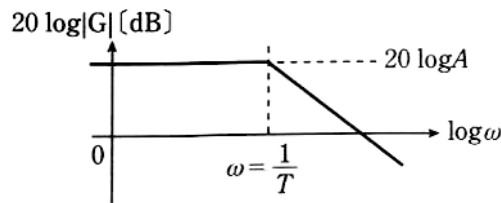


図1.25 1次の伝達関数の折れ線近似

ところで, 一般に,

$$G(s) = A \frac{(1+T_2s)(1+T_4s)\cdots}{(1+T_1s)(1+T_3s)(1+T_5s)\cdots} \quad (1.68)$$

なる形の伝達関数の周波数特性は,

$$\begin{aligned} 20 \log |G(j\omega)| = & 20 \log A + 20 \log |1 + \omega^2 T_2^2|^{1/2} + 20 \log |1 + \omega^2 T_4^2|^{1/2} \cdots \\ & - 20 \log |1 + \omega^2 T_1^2|^{1/2} - 20 \log |1 + \omega^2 T_3^2|^{1/2} - 20 \log |1 + \omega^2 T_5^2|^{1/2} \cdots \end{aligned} \quad (1.69)$$

となる。これは, 一般の折れ線近似であり, たとえば,  $T_1 > T_2 > \cdots > T_5$  のときには図1.26のようになる。一つ一つの要素にはすでに図1.25のような近似がなされており, それらを組み合わせて容易に描くことができる。



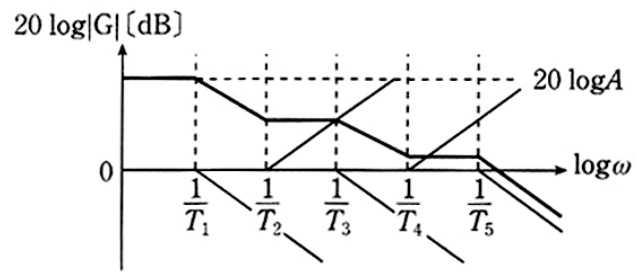


図1.26 折れ線近似

#### 4. 1. 5 制御系の安定性

系の安定性を保つことは、フィードバック制御系において最も重要なことである。ここでは、安定性の数学的表現、判別法、指標などについて述べる。

##### (1) 安定性の概念

有限の入力に対し出力も有限であるものを「定位プロセス」、発散してしまうものを「無定位プロセス」という。たとえば、直流モータはある端子電圧を加えるとほぼ一定の回転速度で回転するから、入力を端子電圧、出力を回転速度とすれば定位プロセスである。しかし、回転角度を出力とすれば、一定速度でモータが回転すれば回転角度は無限に増加していくから、無定位プロセスとなる。

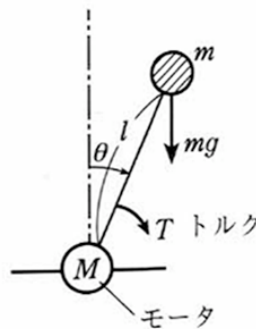


図1.27 倒立振り子

さて、図1.27の倒立振り子の運動方程式は、摩擦はないとして、

$$J\ddot{\theta} = mgl \sin\theta + T \quad (1.70)$$

で与えられる。 $|\theta| \ll 1$  のとき、

$$J\ddot{\theta} = mgl\theta + T \quad (1.71)$$

と近似できるからラプラス変換して、

$$Js^2\theta = mgl\theta + T \quad (1.72)$$

$$\therefore G(s) = \frac{\theta}{T} = \frac{1}{Js^2 - mgl} = \frac{1}{J} \frac{1}{\left(s + \sqrt{\frac{mgl}{J}}\right)\left(s - \sqrt{\frac{mgl}{J}}\right)} = \frac{1}{(s+\alpha)(s-\alpha)} \quad (1.73)$$

となる。

$\theta = G(s)T$ であるから、入力 $T$ からの応答特性は、 $T$ がステップトルクなら $T=1/s$ 、正弦波トルクならば $T=\omega^2/(s^2+\omega^2)$ などを代入して $\theta$ を求めることができる。しかし、 $\theta$ には、必ず $e^{\alpha t}$ の項が出るのでこの系は安定ではない。このように、一般に「伝達関数の分母の根の実数部が零または正のとき系は不安定」である。

いま、 $\theta$ の目標値 $\theta_0$ を設定し、速度の目標値 $\dot{\theta}_0$ は零にしたい（つまり、ある位置で倒立振り子を止めたい）ときは、

$$T = K_1(\theta - \theta_0) + K_2\dot{\theta} \quad (1.74)$$

というフィードバック制御を施すと、

$$J\ddot{\theta} = mgl\theta + K_1(\theta - \theta_0) + K_2\dot{\theta} \quad (1.75)$$

より、

$$(Js^2 - K_2s - mgl - K_1)\theta = -K_1\theta_0 \quad (1.76)$$

$$\therefore \frac{\theta}{\theta_0} = \frac{-K_1}{Js^2 - K_2s - mgl - K_1} \quad (1.77)$$

となる。定常状態では、

$$\frac{\theta}{\theta_0} = \frac{K_1}{mgl + K_1} \quad (1.78)$$

となって、 $K_1$ を十分大きくすれば、 $\theta$ は $\theta_0$ にいくらでも近い値となるように思える。

しかし系が安定であるためには、式(1.77)の分母の根がすべて左半面内にある必要がある。根は、

$$s = \frac{K_2 \pm \sqrt{K_2^2 + 4J(mgl + K_1)}}{2J} \quad (1.79)$$

であるから、 $K_1 < 0$ 、 $K_2 < 0$ であることが望ましい。

このくらいなら特別な制御の知識がなくても何となくわかる。しかし、それは $\theta$ やその変化率が大きくなったときに、それらと反対方向にトルクをかければよい、という当り前のことを言っているだけである。 $K_1$ や $K_2$ の具体的な値はやはりきちんと計算しなければならない。

2次系では分母多項式がある標準形にマッチするように $K_1$ や $K_2$ を決めてもよい。しかし、腕が2本になった二重倒立振り子や、さらに段数の大きな振り子を安定に立たせようとすると、より高度な制御工学の知識を必要とする。

## (2) ラウスの安定判別法

すでに述べたように、システムの極（伝達関数の分母多項式（特性多項式）= 0 とおいた特性方程式の根）に、ひとつでも正の実数部を持つものがある（右半面内にある）と系は不安定である。

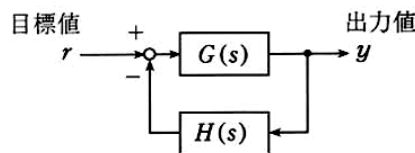


図1.28 フィードバック制御系

図1.28のフィードバック制御系において、目標値から出力値までの伝達関数は、

$$\frac{Y}{R} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} \quad (1.80)$$

である。われわれが興味があるのは分母  $1 + G(s)H(s) = 0$  の根である。

$$\frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_ns^n} \quad (1.81)$$

と展開するとき、式(1.81)の分母を「特性多項式」と言い、特性多項式の根を「システムの極」という。

大切なことは、もし $G(s)$ が不安定であっても、その不安定極は式(1.81)の不安定極とは普通は一致しないということである。逆にいえば、不安定なシステム $G(s)$ をフィードバック制御によって安定化させることがごく普通に可能である。

さて、ラウス (Routh) の判別法では、特性多項式

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0 \quad (1.82)$$

に対して、以下の様な数列 (ラウス数列と呼ぶことにしよう) をつくる。

$s^n$	$R_{11}=a_n$	$R_{12}=a_{n-2}$	$R_{13}=a_{n-3}$	...
$s^{n-1}$	$R_{21}=a_{n-1}$	$R_{22}=a_{n-3}$	$R_{23}=a_{n-4}$	...
$s^{n-2}$	$R_{31}=\frac{a_{n-1}a_{n-2}-a_{n-3}a_n}{a_{n-1}}$	$R_{32}=\frac{a_{n-1}a_{n-4}-a_{n-5}a_n}{a_{n-1}}$	$R_{33}=\frac{a_{n-1}a_{n-6}-a_{n-7}a_n}{a_{n-1}}$	...
$s^{n-3}$	$R_{41}=\frac{R_{31}R_{22}-R_{21}R_{32}}{R_{31}}$	$R_{42}=\frac{R_{31}R_{23}-R_{21}R_{33}}{R_{31}}$	...	...
$s^{n-4}$	...	...	...	...
$s^{n-5}$	...	...	...	...
$s^2$	○	...	...	...
$s^1$	○	...	...	...
$s^0$	○	...	...	...

まず $a_n$ から、 $a_n, a_{n-2}, a_{n-4}$ というように一つおきに係数を並べて第1行とする。次に、 $a_{n-1}$ から始めて、 $a_{n-1}, a_{n-3}, a_{n-5}$ というように並べて第2行とする。第3行以下はたすきがけと引き算、すぐ上の行の一番左の数字で割るという演算である。

一般には、

$$\begin{matrix} R_{i,1} & \dots & R_{i,j} \\ R_{i+1,1} & \dots & R_{i+1,j} \end{matrix}$$

を用いて、 $R_{i+2,j}$ を作るのであるから、

$$R_{i+2,j} = \frac{R_{i,1} \times R_{i+1,j} - R_{i+1,1} \times R_{i,j}}{R_{i+1,1}} \quad (1.83)$$

と書くこともできる。

さて、系が安定であるには、

- (1) 係数 $a_i$ がすべて同符号 (正にすればよい)
- (2) ラウス数列  $R_{ii}$  ( $i=3, 4, \dots$ ) が全て正

であればよい。 $R_{ii}$ の符号が変化するとき、符号変化の回数が不安定根の数になるということも示されている。

以上が、有名なラウスの安定判別法であるが、実はもう少し先がある。特性多項式を $P(s)$ と書き、その次数を $n$ とする。第1行と第2行で行っている分解を、 $P(s)=P_n(s)+P_{n-1}(s)$ と書こう。すると、第3行以下各行の計算は、以下のような意味を持っている。

$s^n$	$P_n(s)$			
$s^{n-1}$	$P_{n-1}(s)$			
$s^{n-2}$	$P_n(s)$ を $P_{n-1}(s)$ で割ったあまり	→	$P_{n-2}(s)$ とする。	商は $a_n s$

$$\begin{array}{llll}
s^{n-3} & P_{n-1}(s) \text{を} P_{n-2}(s) \text{で割ったあまり} & \rightarrow P_{n-3}(s) \text{とする。} & \text{商は } a_{n-1}s \\
& \dots & & \\
s^1 & P_3(s) \text{を} P_2(s) \text{で割ったあまり} & \rightarrow P_1(s) \text{とする。} & \text{商は } a_3s \\
s^0 & P_2(s) \text{を} P_1(s) \text{で割ったあまり} & \rightarrow P_0(s) \text{とする。} & \text{商は } a_2s \\
& P_1(s) \text{は} P_0(s) \text{で割り切れて、} & & \text{商は } a_1s \text{ となる。}
\end{array}$$

この計算はユークリッドの互除法である。そして計算された「あまり」の最高次の係数がラウス数列 $R_{i,1}$ である。

これは、ラウスの方法は、もとの多項式をいくつかの要素に分解していることになる。その全体像を理解するにはもうすこし先の知識が必要であるが、結論だけ述べると、質点がバネでつながったようなシステムに対応する。そしてその質点の質量やバネ係数（各行の商である $a_i$ で表される。）にひとつでも負になると系は不安定と判定されるということになる。さらに、質量やバネ係数の系列が制御系の良さを表現する。ラウスの方法は、単に安定か不安定かを判定するだけではなく、もっと奥深いものを含んでいるのである。

### (3) フルビッツの安定判別法

フルビッツ (Hurwitz) の方法は本質的にラウスの方法と同一であることが知られている。ここでは計算方法だけを示しておく。

$$H_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & 0 \\ \vdots & & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & a_5 & a_3 & a_1 \\ 0 & \dots & & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} \quad (1.84)$$

なるフルヴィッツ行列式を作り、

$$H_1 = |a_{n-1}| \quad (1.85)$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix} \quad (1.86)$$

$$H_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad (1.87)$$

.....

なる小行列式（フルヴィッツ行列式）を計算する。系が安定であるためには、

- (1) 係数 $a_i$ がすべて正（ラウスの安定判別するときと同じ）
- (2) フルヴィッツ行列式  $H_i$  ( $i=2, 3, \dots, n-1$ ) がすべて正

でなければならない。

なお、 $R_{i1} = H_{i-1}/H_{i-2}$  ( $i=3, 4, \dots, n-1$ ) という関係があることが容易に確かめられる。フルビッツの方法は、

系の次数 $n$ が4程度までなら計算可能であるが、それ以上大きな次数の系になると行列式の計算が繁雑になるので、今日ではあまり用いられないようである。

(4) ラウスの方法の例題

まず、特性方程式  $s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 4s^2 + s + 5 = 0$  の安定判別をしてみよう。ラウス数列の最初の二段は、

$s^5$	1	2	1
$s^4$	3	4	1

となり、以降続けると、

$s^3$	$\frac{3 \times 2 - 1 \times 4}{3} = \frac{2}{3}$	$\frac{3 \times 1 - 1 \times 5}{3} = -\frac{2}{3}$
	$\frac{\frac{2}{3} \times 4 - 3 \times (-\frac{2}{3})}{3} = 7$	$\frac{\frac{2}{3} \times 5 - 3 \times 0}{3} = 5$
$s^2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
$s^1$	$\frac{7 \times (-\frac{2}{3}) - \frac{2}{3} \times 5}{7} = -\frac{8}{7}$	
$s^0$	5	

$s^1$ の段で、 $R_{51} = -8/7$ で負となっている。符号の変化は、 $R_{41} = 7$ から $R_{51} = -8/7$ になるときと、 $R_{51} = -8/7$ から $R_{61} = 5$ となるときの計2回であるから、二つの不安定根を持つというがわかる。

次に、図1.29のフィードバック制御系が安定であるための $K$ の条件を求めてみよう。

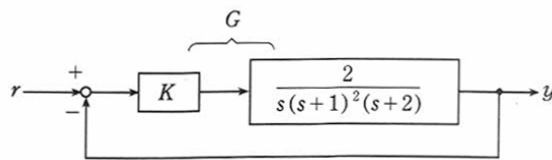


図1.29 フィードバック制御系

$$\frac{Y}{R} = \frac{G}{1+G} \tag{1.88}$$

より、特性多項式は、

$$s^4 + 4s^3 + 5s^2 + 2s + 2K = 0 \tag{1.89}$$

となる。ラウス数列を作っていくと、

$s^4$	1	5	$2K$
$s^3$	4	2	0
	$\frac{4 \times 5 - 1 \times 2}{4} = \frac{9}{2}$	$2K$	
$s^2$	$\frac{\frac{9}{2} \times 2 - 4 \times 2K}{\frac{9}{2}} = \frac{2}{9}(9-8K)$		
$s^1$	$\frac{9}{2}$	0	

$$s^0 \quad 2K$$

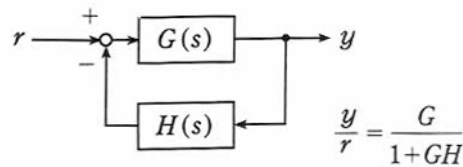
従って、系が安定であるためには、

$$2K > 0, 9 - 8K > 0 \text{ より, } 0 < K < 9/8 \text{ であること}$$

が条件となる。なお、 $K=0, 9/8$ の境界では、系は $s=j\omega$  ( $\omega$  は特続振動の角周波数) という形の根を持っているはずである。確かめてみよ。

#### (5) ナイキストの安定判別法

ラウスの安定判別法は、閉ループ伝達関数 $G/(1+GH)$ を計算し、直接特性多項式を調べるものであった。しかし、この計算はしばしば大変面倒であったり、なんらかの測定データから特性多項式を求める必要がある実際の場合には、計算自体が不可能なことも少なくない。



ラウスの方法 →  $G/(1+GH)$ の極を調べる (直接的)

ナイキストの方法 →  $GH$ だけを調べる (間接的)

図1.30 フィードバック制御系と安定判別

これに対し、ここで述べるナイキスト (Nyquist) の方法は、開ループ伝達関数 $G(s)H(s)$ だけを調べて、閉ループ伝達関数  $G(s)/(1+G(s)H(s))$  の様子を間接的に予測するものである。たとえば図1.30の制御系の安定性は、 $1+G(s)H(s)=0$ の根が全部左半面 (LHP: Left Half Plane) にあれば保証される。しかし、ラウスの安定判別法でやってきたように、これをいちいち計算するのはかなり面倒である。もし $G(s)H(s)$ だけを調べて安定判別ができればたいへん便利である。

#### ・ナイキストの定理

$G(s)H(s)=0$ の極を全部書きだし、虚軸上に極がある場合はこれを右に避けながら、 $s$ 平面上の図1.31の様な積分路を考える。

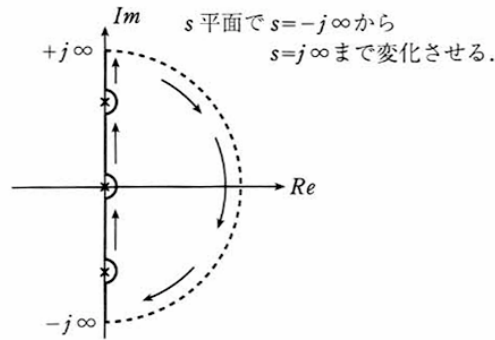


図1.31 s平面におけるsの動かし方

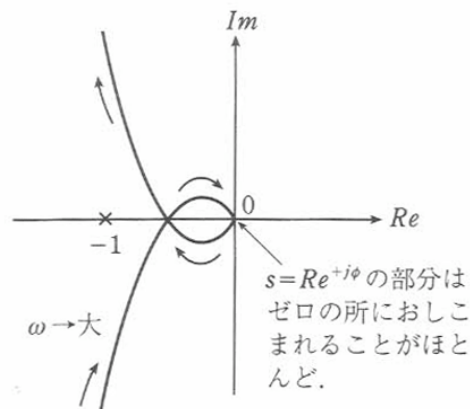


図1.32 ナイキスト軌跡

s平面上で虚軸を負から正に向かって上っていく間は、これを周波数 $j\omega$ だと思ってよい。(たいていの物理システムは $\omega \rightarrow \infty$ のとき何の反応も示さない(出力がゼロとなる)。図1.32で $\omega$ を大きくすると原点に到達しているのがこれに対応している。

s平面上で図1.31の経路でsを移動させたとき、開ループ伝達関数 $G(s)H(s)$ の軌跡(ナイキスト軌跡)が、 $(-1, 0)$ の回りを $r$ 回回転し、 $G(s)H(s)$ の極のうち、実数部が右半平面にあるもの(つまり、不安定根、ただし $s=j\omega$ 上はのぞく。なぜなら図1.31の軌跡でもよけている。)が $k$ 個あったとすると、「 $r=k$ であれば閉ループ系が安定である。」これがナイキストの定理である。

実際のシステムでは $k=0$ のことが多く、そのときは $r=0$ が安定条件となる。これを狭義のナイキストの定理という。要するに、軌跡が $(-1,0)$ を囲まなければよいのである。

次に実際に、図の例をとって軌跡を描いてみよう。簡単のために $H(s)=1$ としておく。

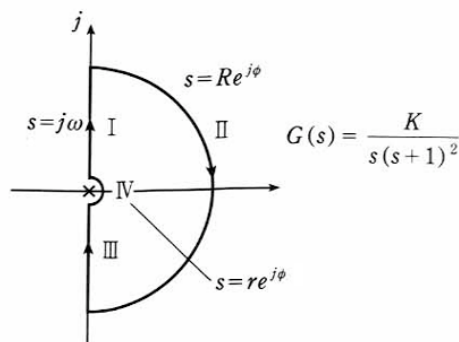




図1.33 s平面上の経路とその番号

・経路Ⅰ  $s=j\omega$  ( $\omega: +r \rightarrow +\infty$ ) を代入して,

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)^2} = -\frac{2K}{(1+\omega^2)^2} - j\frac{K(1-\omega^2)}{\omega(1+\omega^2)^2} \quad (1.90)$$

これを描くと、図1.34のようになる。

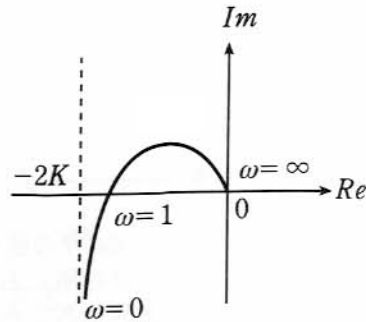


図1.34 経路Ⅰに対する軌跡

・経路Ⅱ  $s = R e^{-j\phi}$  ( $\phi: +\pi/2 \rightarrow -\pi/2$ ) を代入して,

$$G(R e^{-j\phi}) = \frac{K}{R e^{-j\phi} (1 + R e^{-j\phi})} \quad (1.91)$$

となるので、 $R \rightarrow 0$  とすると 0 に収束する。

・経路Ⅲ  $s = j\omega$  ( $\omega: -\infty \rightarrow -r$ ) であり、この軌跡は、極が実数係数の多項式の根であるから、必ず、経路Ⅰの場合と実軸対称になる。

・経路Ⅳ  $s = r e^{-j\phi}$  ( $\phi: -\pi/2 \rightarrow +\pi/2$ ) を代入すると,

$$G(r e^{-j\phi}) \rightarrow \frac{K}{r} e^{-j\phi} \quad (1.92)$$

であるので、これは大きな半径で、 $+\pi/2$  から  $-\pi/2$  に回る軌跡となる。

$K$  を大きくすると  $(-1, 0)$  をループに含みやすくなるが、これはゲインを大きくすると系が不安定になりやすいという常識と一致する。

以上のことから、通常は  $G(j\omega)$  のみを考え、 $\omega$  を  $0 \rightarrow \infty$  として調べれば十分であることがわかる。つまり、経路Ⅰだけを相手にして、図1.34の軌跡だけを調べればよいのである。

試みに図1.35の三つの場合について、閉ループ系が安定か不安定かを述べてみよう。それは軌跡の実軸との交点と点  $(-1, 0)$  の大小関係で決まり、

- ① 安定, ② 安定, ③ 不安定

となる。

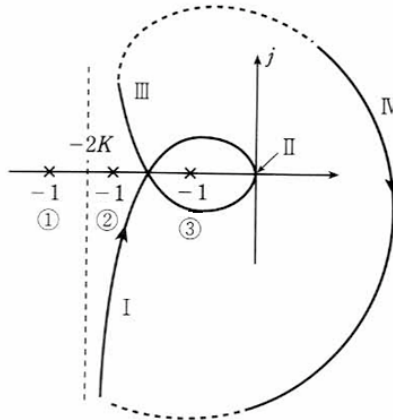
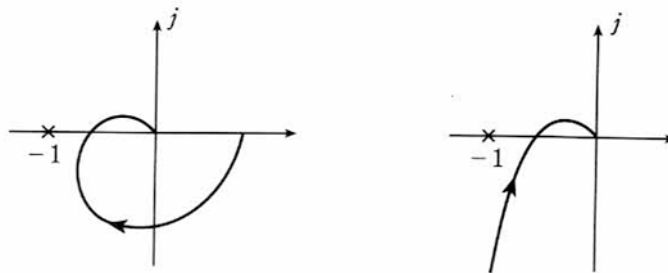


図1.35 安定な場合, 不安定な場合

通常の物理システムは、無限大周波数の信号には反応しないので、ほとんどの場合、 $G(j\infty)=0$ になる。一方、 $G(0)$ に関してはことおきあり、 $\omega=0$ 、つまり一定値の直流的な入力を加えたとき $G(0)$ が有限の値をとる場合は図1.36(a)、無限の値をとる場合は(b)のような軌跡となる。それぞれ、定位プロセス、無定位プロセスに対応する。



(a) 定位プロセス

(b) 無定位プロセス

図1.36  $G(0)$ が有限, 無限の値をとる場合のナイキスト軌跡

#### (6) フィードバック制御系の安定度指標

##### ・ゲイン余有と位相余有

これまで、系の特性は完全に与えられたとして論議をすすめてきた。しかし、実際には測定した特性には必ず誤差があるし、特性自体も一定とはかぎらない。たとえば、増幅器の増幅度は電源電圧が変わると変化するし、飛行機の舵のきき方は、その角度や高度によって異なってくる。このようなことを考えると、フィードバック制御系は、単に安定であるというだけでなく、ある程度系の特性が変わっても安定性を失わないだけの余裕をもっていることが望ましい。

このような安定性の余裕の一つの表現法としてよく知られているのが、次に示す位相余有、ゲイン余有である。

いま、ある線形システムの一巡伝達関数 $KG(j\omega)H(j\omega)$ の複素面上の軌跡が図1.37の実線のようになつたとしよう。この場合は、 $G(s)H(s)$ が安定な要素である（すなわち極を $s$ の右半面にもたない）かぎり、系は明らかに安定である。ところが、実際には、測定の誤差や特性の変化があるため、 $KG(j\omega)H(j\omega)$ の軌跡はハッチを

施したような範囲にある幅をもって存在すると考えなくてはならない。したがって、もとの軌跡が、(-1, 0)の点のあまり近くにあると、実際の軌跡は(-1, 0)を含み、場合によっては系は不安定になってしまう。

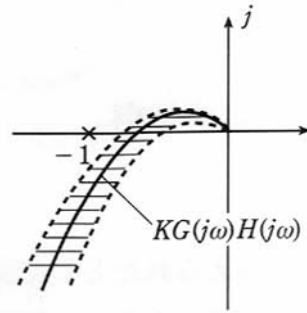


図1.37 フィードバック制御系とその変動

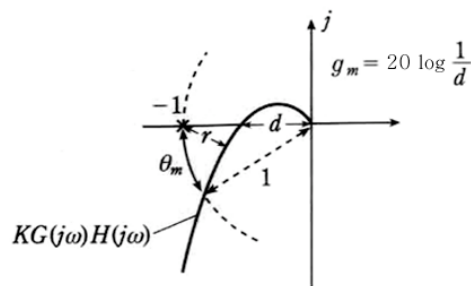


図1.38 ナイキスト線図上の $\theta_m$ ,  $g_m$

このようなことを防ぐためには、 $KG(j\omega)H(j\omega)$ の軌跡が、-1の点からある程度以上離れていることが必要である。そこで、安定性の余裕の表現として、-1から軌跡までの距離（図1.38の $r$ ）をとることが考えられる。しかし、この距離を求めるには図上で軌跡と(-1,0)の点を結び、その長さが最小になる点を探すという操作が必要であるし、周波数応答のほかの表示法、たとえばポード線図などでは簡単に求められない欠点がある。そこで、この $r$ の代わりに、われわれは、通常、図1.38に示すような位相余裕 $\theta_m$ 、ゲイン余裕 $g_m$ を、安定性の余裕（安定度）の表現として用いるのである。

すなわち、

$$\theta_m = 180^\circ + \angle KG(j\omega)H(j\omega) \Big|_{|KG(j\omega)H(j\omega)|=1 \text{ の点}} \quad [\text{度}] \quad (1.93)$$

（ゲインが0dBになる周波数において、位相があと $\theta_m$ おけると安定限界に達する。）

$$g_m = 20 \log |1/KG(j\omega)H(j\omega)| \Big|_{\angle KG(j\omega)H(j\omega)=-180^\circ \text{ の点}} \quad [\text{dB}] \quad (1.94)$$

（位相遅れが $180^\circ$ になる周波数において、ゲインがあと $g_m$ 大きくなると安定限界に達する。）

と定義される。 $g_m$ には式(1.94)のようにデシベル目盛を用いる。その理由は、このようにすると系が安定のときは $g_m$ は正、不安定なときは負、安定限界にあるときはちょうど0[dB]となるからである。

この $\theta_m$ を位相余裕（phase margin）、 $g_m$ をゲイン余裕（gain margin）という。

後に述べるように、 $KG(j\omega)H(j\omega)$ の軌跡が-1に近づくにつれ、一般に系の過度応答は振動的になり、周波数特性はある周波数で大きなピークをもつ。このことは系の特性としては好ましいものではない。そこで

フィードバック制御系の設計にあたっては、この位相余有とゲイン余有を適当な値に選ぶことが、系の動特性を良好にするという意味からも必要になってくるのである。すなわち、 $\theta_m$ 、 $g_m$ は安定性の余裕の表現であるが、それと同時に、系の動特性の良否を示す一つの表現でもあり、その意味でも重要である。

ゲイン余有、位相余有は、ボデー線図（図1.39）、ゲイン・位相線図（図1.40）からも、容易に読みとることができる。

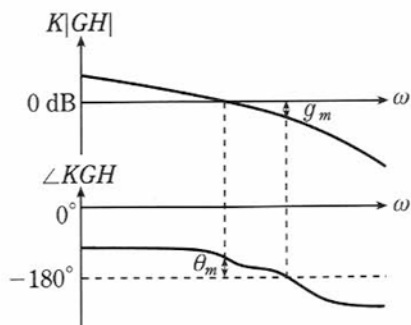


図1.39 ボデー線図上の $\theta_m$ ,  $g_m$

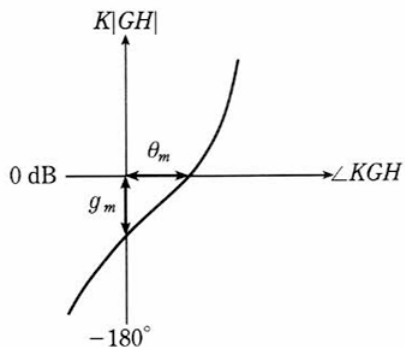


図1.40 ゲイン・位相線図上の $\theta_m$ ,  $g_m$

## 4. 2 フィードバック制御系の設計

### 4. 2. 1 フィードバック制御系の基本特性

ここでは、フィードバック制御系の具体的な設計を行うにあたって必要となる、基本的な特性についてまとめて述べておく。

#### (1) 入力追従特性と外乱抑圧特性

フィードバック制御の目的には、大きく分けて、

- ・ 目標値追従特性
- ・ 外乱抑圧特性

の改善という二つがある。

シャワーの温度をする制御系は、熱い湯に対して水を混入することによってこれを行う。たとえば $40^\circ$ の湯温を $42^\circ$ にしようとするとき、図2.1のIのように、ちょっとオーバーシュート気味の方が立ち上がりが速くて好ましいようであるが、人によってはIIのようにゆるやかな接近をする方がいいかも知れない。IIIでは遅すぎる。このような特性を目標値追従特性と呼ぶ。

一方、もとの熱湯の温度が下がり、その結果湯温が下降してしまったときなど、これをもとに戻す働き、すなわち外乱抑圧特性も劣らず重要である。

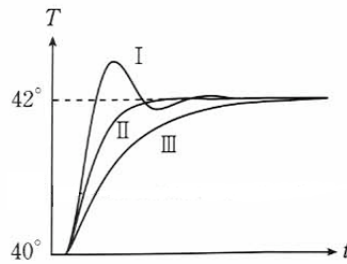


図2.1 シャワーの温度設定値の変更に対する応答

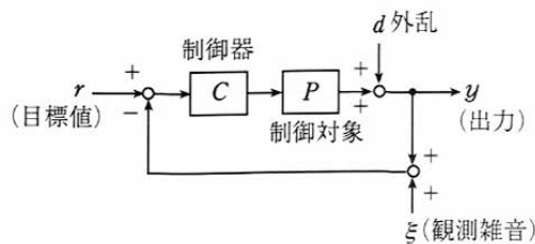


図2.2 フィードバック制御系

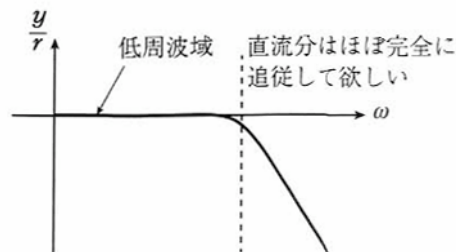


図2.3 目標値追従特性の例

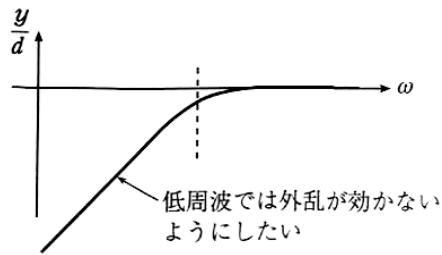


図2.4 外乱抑圧特性の例

図2.2の制御系において、目標値 $r$ と外乱 $d$ から出力 $y$ までの伝達関数を計算してみると、

$$y = \frac{CP}{1+CP} r + \frac{1}{1+CP} d \quad (2.1)$$

となり、およそ、図2.3および図2.4のような特性を持たせたいという漠然とした要求があることがわかる。

ここで、制御誤差を  $e = r - y$  と定義すれば、

$$e = \frac{1}{1+CP} r - \frac{1}{1+CP} d \quad (2.2)$$

となるから、一見すると、目標値応答と外乱応答とは同じ性質を持っているようである。

ここで、共通に現れる  $1/(1+CP)$  を感度関数  $S(s)$  と呼び、

$$S = \frac{1}{1+CP} \quad (2.3)$$

と定義すると、目標値追従特性と外乱抑圧特性は  $S(s)$  によって一緒に変化する。このような系は「1自由度系」と言い、この範囲では先に述べた二つの特性は「同じ」ことになる。

しかし「2自由度系」では、この両者はほぼ独立に設計できる。

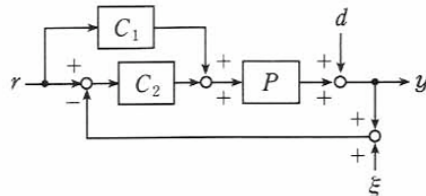


図2.5 2自由度制御系の一構成例

図2.5に示す2自由度制御系では、目標値からのフィードフォワード経路が存在する。このとき、

$$y = \frac{(C_1+C_2)P}{1+C_2P} r + \frac{1}{1+C_2P} d \quad (2.4)$$

従って、誤差  $e = r - y$  は、

$$e = \frac{1 - C_1 P}{1 + C_2 P} r - \frac{1}{1 + C_2 P} d \quad (2.5)$$

となる。 $C_1$ ,  $C_2$ によって、目標値と外乱から出力までの二つの特性はかなり自由に変えられることがわかる。

現在ではPID制御器のような1自由度の制御器が普及したために、2自由度制御は忘れられてしまっている。たとえば、ファジー制御の多くは、まず目標値と実際値の差をとりその値や変化率の大小に応じて制御方針を決める。しかし、差をとるところで、有益な情報を捨ててしまうことになる。

1自由度系では、外乱抑圧性能を改善しようとする、必然的に高ゲインにせざるを得なくなる。すると目標値応答は速くなりすぎ好ましくない振動を生じたりするので、高ゲイン化には限界があると認識されている。しかし、2自由度制御を知っていれば、ずっとましな方策をとることができるのである。

ここで、図2.5の観測ノイズについて考えてみよう。観測ノイズ  $\xi$  から出力  $y$  までの伝達特性は、

$$\frac{y}{\xi} = - \frac{C_2 P}{1 + C_2 P} \quad (2.6)$$

である。もちろん、この大きさもなるべく小さくしたい。

しかし、この要求は、外乱抑圧特性の改善要求とは矛盾している。式(2.5)からは、外乱抑圧のために  $1/(1+C_2P)$  を極力0にもっていきたいという要求が見てとれるのであるが、式(2.6)とは足して1になっているから、両方とも小さくするのは不可能である。

しかし、観測ノイズは多くの場合、中～高周波領域に存在し、抑圧したい外乱は低周波領域にあることが多いから、目的を実現する周波数領域を分ければ、うまく設計することが可能である。

$$T = \frac{C_2 P}{1 + C_2 P} \quad (2.7)$$

のことを「補感度関数」という。 $T(s)$ はロバスト安定性の指標でもある。

感度関数  $S(s)$  と補感度関数  $T(s)$  をともに小さくしたいという要求は、後述する  $H_\infty$  制御の重要な問題のひとつであり「混合感度最適化問題」と呼ばれる。なお、 $T(s)$  は1自由度系では目標値応答とも一致していることを注意しておこう。

## (2) 定常誤差と誤差係数

### ・定常誤差

ステップ状の入力に対する最終値の誤差のことを「定常誤差」という。

$$e = r - y = \frac{1}{1 + G(s)} r \quad (2.8)$$

であるから、 $r = 1/s$  (ステップ指令) のとき、 $t \rightarrow \infty$  のときの  $e$  の値は、

$$e_s = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1+G(0)} \quad (2.9)$$

である。

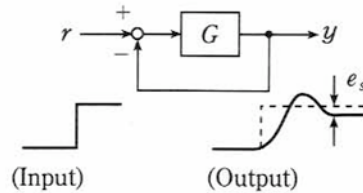


図2.6 ステップ指令に対する応答

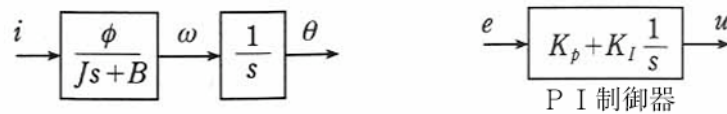
もし、 $e_s=0$ であったとすると、その様なことが起こるためには、 $G(0)=\infty$ でなくてはならないから、 $G(s)$ は $1/s$ なる純粋積分項を少なくとも一つ含まなくてはならない。すなわち、

$$G(s) = \frac{\dots}{s(s+p_1)(s+p_2)\dots} \quad (2.10)$$

という形でなければならない。これ以外の場合は、 $G(0)=K$  (有限の値) として、

$$e_s = \frac{1}{1+K} \quad (2.11)$$

なる定常誤差を生じる。ここに、 $K$ のことを「定常ゲイン」という。式(2.10)の条件は、原点に少なくとも1つ極があれば満たされる。その極はプラント (制御対象) が持っているもコントローラが持っているもよい。もし、プラントがもっていないかとも定常誤差を0にしたいのであれば、コントローラに持たせる必要がある。



(a) プラントが原点に極をもつ (b) コントローラが原点に極をもつ

図2.7 定常誤差を生じない系

・速度誤差

つぎに、図2.8に示すように、時間に比例して大きくなる目標値 (ランプ関数) に追従させる場合を考えよう。具体的には、物騒な話であるが、飛行物体に照準を合わせる制御系がある。この場合の誤差  $e_v$  を速度誤差とよぶが、



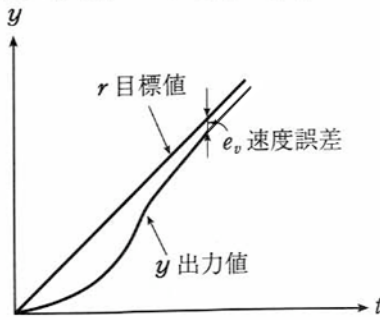


図2.8 ランプ入力に対する応答

$$e_v = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1+G(s)} \frac{1}{s} \quad (2.12)$$

であるから、以下の三つの場合が考えられる。

- (1)  $e_v = \infty$  :  $G(s)$ が  $1/s$  を含まない。
- (2)  $e_v = 1/K$  :  $G(s)$ が  $1/s$  を一つだけ含んでいる。ただし、

$$K = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) \quad (2.13)$$

- (3)  $e_v = 0$  :  $G(s)$ が  $1/s$  を二つ以上含む

・高次の目標値に対する定常誤差

目標値を多項式で近似することを考えると、 $r$ としては  $1/s$  (ステップ)、 $1/s^2$  (ランプ) …などのパターンがある。一般に、 $G(s)$ が含む $1/s$ の数を $n$ とすると、表2.1のような関係を得る。

表2.1 目標値関数に対する定常誤差

		$K = \lim_{s \rightarrow 0} s^n G(s)$				
$r$	$e_s$	$e_v$	$e_a$	...	...	
	$n$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{s^4}$	...
0	$\frac{1}{1+K}$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	...	
1	0	$\frac{1}{K}$	$\infty$	$\infty$	...	
2	0	0	$\frac{1}{K}$	$\infty$	$\infty$	
3	0	0	0	$\frac{1}{K}$	$\infty$	
...	...	...	...	0	...	

では、いろいろな入力に対して定常誤差を生じなくするには、コントローラに $1/s$ をたくさん持たせておいてやればよいではないか、と思われるかも知れないが、問題はそう簡単でない。

$1/s$ が多くなればなるほど、安定性を著しく阻害するようになるので $1/s$ の多用は避けたいし、高次入力に

対する追従特性を良くすることはさほど重要でないという事情もあって、通常は積分器を1個だけ入れることが多い。

#### 4. 2. 2 2次系の性質

現実のシステムによく現われ、さまざまな現象の解析に重要な役割を果たす2次系の過渡応答および周波数応答を、少し詳しく見ておこう。

##### (1) 2次系の過渡応答

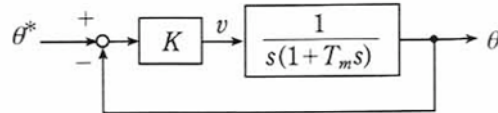


図2.9 サーボモータの位置制御系

図2.9のサーボモータの制御を例にとり、位置の指令 $\theta^*$ から実際値 $\theta$ までの伝達関数を計算すると、

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\theta^*} &= \frac{\frac{K}{s(1+T_m s)}}{1 + \frac{K}{s(1+T_m s)}} = \frac{K}{T_m s^2 + s + K} = \frac{K/T_m}{s^2 + \frac{1}{T_m}s + \frac{K}{T_m}} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned} \quad (2.14)$$

(最後の項は、2次系へのモデルマッチングを行っている。)

となる。ここで、 $\theta^*$ をステップ指令とすると、 $\theta^* = 1/s$ であるから、 $\theta$ は、

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{1}{s} = \frac{\alpha\beta}{(s-\alpha)(s-\beta)} \frac{1}{s} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s} + \frac{\beta}{\alpha-\beta} \frac{1}{s-\alpha} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} \frac{1}{s-\beta} & (\alpha \neq \beta) \\ \frac{1}{s} + \frac{\alpha}{(s-\alpha)^2} - \frac{1}{s-\alpha} & (\alpha = \beta) \end{cases} \end{aligned} \quad (2.15)$$

となり、時間関数に直すためにラプラス逆変換して、

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 + \frac{\beta}{\alpha-\beta} e^{\alpha t} - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} e^{\beta t} & (\alpha \neq \beta) \\ 1 + \alpha t e^{\alpha t} - e^{\alpha t} & (\alpha = \beta) \end{cases} \quad (2.16)$$

となる。

以下、解のパターンを $\zeta$ によって場合分けしよう。

- |                 |                             |      |
|-----------------|-----------------------------|------|
| (1) $\zeta > 1$ | $\alpha \neq \beta$ なる負の2実根 | (安定) |
| (2) $\zeta = 1$ | $\alpha = \beta$ なる負の重根     | (安定) |

- |                     |                      |        |
|---------------------|----------------------|--------|
| (3) $0 < \zeta < 1$ | 実数部が負の共役複素根          | (安定)   |
| (4) $\zeta = 0$     | 共役純虚数の根              | (安定限界) |
| (5) $\zeta < 0$     | 実数部が正の共役複素根～正の重根～2実根 | (不安定)  |

いうまでもなく(1)～(3)は指数の実数部が負なので安定である。(4)は安定限界にあり、(5)は不安定になる領域である。

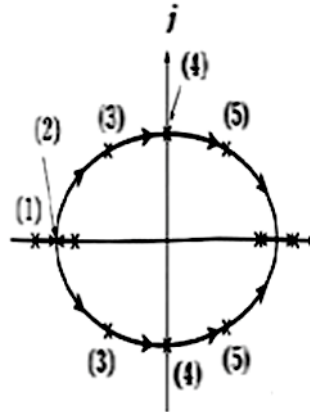


図2.10 (1)～(5)の各ケースにおける根の配置

以上をまとめると図2.10に描くように、 $\zeta$ を変化させた場合の根の軌跡を得ることができる。以下にもう少し詳しく見ていこう。

(1)  $\zeta > 1$ の場合

根は二つの負の実根となり、

$$\alpha, \beta = -\zeta\omega_n \pm \sqrt{\zeta^2 - 1} \omega_n \quad (2.17)$$

ステップ応答は、

$$\theta(t) = 1 - \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \frac{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} \quad (2.18)$$

と計算される。 $d\theta(t)/dt$ を計算すると、常に正となることがわかるから、この時間応答は単調増加となる。 $\zeta$ を大きくするほどダンピングが効いてくる。さらに、 $\zeta$ がある程度大きくなると、

$$\frac{\theta}{\theta^*} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow \frac{1}{1 + \frac{2\zeta}{\omega_n} s} \quad (2.19)$$

となり、ほとんど一次遅れ系とみなしてもよくなる。

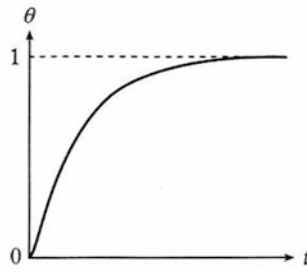


図2.11  $\zeta > 1$  の場合の時間応答

(2)  $\zeta = 1$  の場合

根は、 $\alpha = \beta$  なる負の重根となる。すなわち、

$$\alpha, \beta = -\omega_n \quad (2 \text{ 重根}) \quad (2.20)$$

ステップ応答は、

$$\theta(t) = 1 - (\omega_n t + 1)e^{-\omega_n t} \quad (2.21)$$

この特性は「臨界制動」とよばれ、行きすぎ（オーバーシュート）がなく速やかに最終値に達するため、応答特性の「よい」モデルとして用いられる。たとえば電圧計など指示計器の針の応答は臨界制動特性になるようにコイルバネの強さなどを設定している。

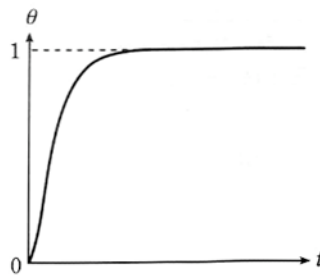


図2.12  $\zeta = 1$  の場合の時間応答

(3)  $0 < \zeta < 1$  の場合

根は負の実数部をもつ共役複素数となる。

$$\alpha, \beta = -\zeta\omega_n \pm j\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \quad (2.22)$$

ステップ応答は、

$$\begin{aligned} \theta(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_0 t + \frac{\zeta\omega_n}{\omega_0} \sin \omega_0 t \right) \\ &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \cos \omega_0 t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin \omega_0 t \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

となる。ただし、

$$\omega_0 = \sqrt{1-\zeta^2}\omega_n \quad (2.24)$$

式(2.23)は減衰する正弦波を表わしていて、この応答は「減衰振動」になる。その周波数である $\omega_0$ を「振動角周波数」という。 $(\omega_n$ は固有角周波数という。)必ず $\omega_0 < \omega_n$ となるが、定性的には、減衰項（機械系でい

えば摩擦など)が原因となり、本来振動したい周波数よりも動きにくくなって遅れがちになるためであると説明できる。

この減衰振動の様子をもう少し調べてみよう。図2.13の  $A_1, A_2, A_3$  の値は、

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t} \sin\omega_n t = 0 \quad (2.25)$$

を解いて求められる。この解

$$t_n = \frac{n\pi}{\omega_n} \quad (2.26)$$

は応答波形の山(極大点)の時刻を与える。山の高さは、

$$A_n = e^{-\frac{n\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = \left( e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \right)^n = A_1^n \quad (2.27)$$

となる。これより、振動幅は「半周期ごとに  $e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$  倍になっていく」と言えて、 $\xi \rightarrow 0$  のときには減衰しなくなる。この意味で  $\xi$  のことを「減衰定数」というのである。

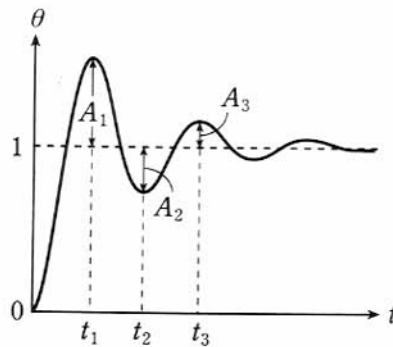


図2.13 振動減衰の応答波形

## (2) 2次系の周波数応答

今度は2次系の周波数特性を調べてみよう。周波数特性は、伝達関数の  $s$  を  $j\omega$  でおきかえて、

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\xi\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + j2\xi\omega_n\omega} \quad (2.28)$$

で与えられ、振幅は、

$$|G(j\omega)| = \frac{\omega_n^2}{\sqrt{(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_n^2\omega^2}} \quad (2.29)$$

位相は、

$$\angle G(j\omega) = -\tan^{-1} \frac{2\xi\omega_n\omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \quad (2.30)$$

となる。 $\omega=0$  では  $|G(j\omega)| \rightarrow 1$  (0[dB])、 $\omega=\infty$  では  $|G(j\omega)| \rightarrow 0$  ( $-\infty$ [dB]) となることはすぐわかるだろう。では、途中の周波数ではどうなるだろう。

(1)  $1-2\xi^2 \leq 0$  のとき、すなわち、 $\xi \geq 1/\sqrt{2} = 0.707$  のとき  
 $|G(j\omega)|$  は  $\omega$  に対して単調減少となり、その特性は以下ようになる。

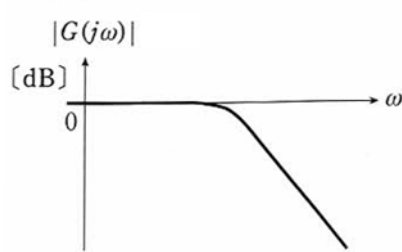


図2.14  $\xi \geq 1/\sqrt{2}$  の場合の周波数応答

(2)  $1-2\xi^2 > 0$  のとき、すなわち、 $\xi < 1/\sqrt{2} = 0.707$  のとき  
 $\omega = \sqrt{1-2\xi^2} \omega_n \equiv \omega_p$  にてピーク値

$$M_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \quad (2.31)$$

を持つようになる。

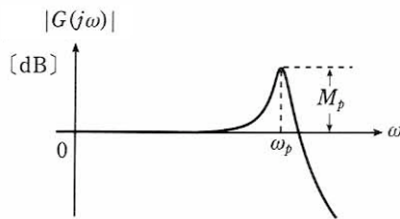


図2.15  $\xi < 1/\sqrt{2}$  の場合の周波数応答

このように、ピークのあるときはある周波数で入力（指令値）よりも出力が大きくなることになる。さらに  $M_p$  が大きくなると系の安定性が損なわれていく。

前節で見たように、「過渡応答が振動的かどうか」の境界値は  $\xi = 1$  である。また、「周波数応答が  $M_p$  を持つか否か」の境界値は  $\xi = 1/\sqrt{2} = 0.707$  であり、両者は異なっているので注意されたい。

### (3) 高次系の代表根

図2.16のような極の配置をもつ系があるとき、このステップ応答を調べようと思ったら、程度問題ではあるが、虚軸に一番近い  $\alpha_1, \alpha_2$  だけを調べればよい。

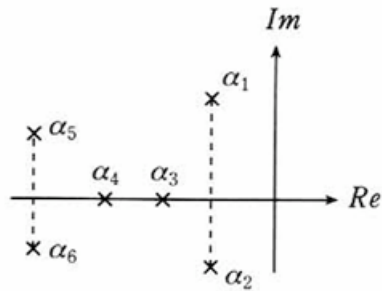


図2.16 高次系の極配置と代表根

たとえば,

$$G(s) = \frac{K}{(s+\alpha_1)(s+\alpha_2)(s+\alpha_3)\dots} \quad (2.32)$$

という伝達関数をもつ系のステップ応答を考えてみよう。簡単のために、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ はすべて異なる零でない数であるとすれば、ステップ応答のラプラス変換 $G(s)/s$ は次のように部分分数に展開できる。

$$G(s) = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s+\alpha_1} + \frac{K_2}{s+\alpha_2} + \dots \quad (2.33)$$

その時間応答は,

$$y(t) = 1 + \square e^{-\alpha_1 t} + \square e^{-\alpha_2 t} + \dots \quad (2.34)$$

となる。

この応答についてももう少し詳しくしらべてみよう。右辺各項の係数 $K_i$ は展開定理を用いると,

$$K_i = \frac{\prod (\text{当該極} \leftarrow \text{零点}) \prod (s \text{ 面原点} \leftarrow \text{他の極})}{\prod (\text{当該極} \leftarrow \text{他の極}) \prod (s \text{ 面原点} \leftarrow \text{零点})} \quad (2.35)$$

となる(本書では詳しく説明していない)。すなわち $K_i$ は、 $s$ 平面上での極・零点の分布から計算できるのである。

一例として,

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{s+2}{(s^2+s+1)(s+5)} \frac{5}{2} \\ &= \frac{s+2}{(s+\frac{1+j}{2})(s+\frac{1-j}{2})(s+5)} \frac{5}{2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

をとると、このときの極、零点は図2.17のように $s$ 平面上に分布する。

ステップ応答 $y(t)$ は

$$y(t) = 1 + K_1 e^{-\frac{1+j}{2}t} + K_2 e^{-\frac{1-j}{2}t} + K_3 e^{-5t} \quad (2.37)$$

である。この $K_1, K_2, K_3$ の絶対値を求めるには図2.17の上で距離をはかり、式(2.35)にしたがって計算すればよい。この場合は,

$$|K_1| = |K_2| = \frac{1.6}{1.4 \times 4.4} \frac{1 \times 5}{2} \cong 0.65 \quad (2.38)$$

$$|K_3| = \frac{3}{4.4 \times 4.4} \frac{1 \times 1}{2} \cong 0.08 \quad (2.39)$$

すなわち、 $K_3$ の値は $K_1$ 、 $K_2$ に比べてずっと小さくなる。これは $K_2$ に対応する極-5が他の極に比べ原点からずっと離れているためである。さらに、この項は、 $e^{-5t}$ で他の項に比べきわめて速く減衰する。このことは図2.18の $y(t)$ の過渡応答からもよくわかる。式(2.36)で $5/(s+5)$ の項を無視した場合の応答と、正確な応答との差はほんのわずかである。

そこで、大ざっぱに系の特性を考えると、原点に最も近い極のみを考え他を無視してもよい。このような、原点に最も近い極のことを、代表根、あるいは支配極 (dominant poles) とよぶ。この例では、 $-(1 \pm j)/\sqrt{2}$ が代表根になる。フィードバック制御系では、一つの共役複素数の組が代表根となるよう設計されることが多い。そして他の極を無視すると、系の伝達関数は2次系のものになる。われわれが、これまで2次系の応答について詳しく論じた理由もここにある。

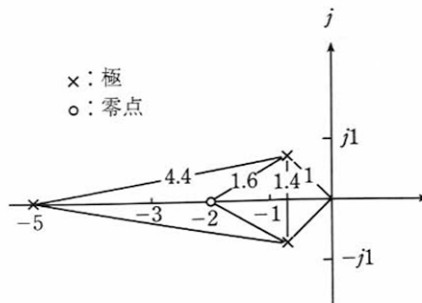
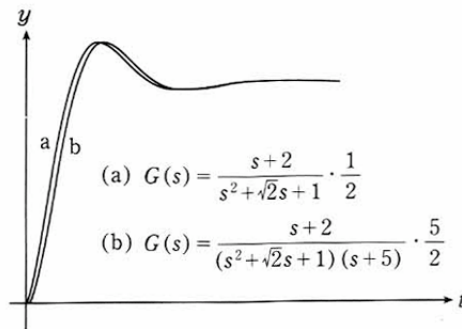


図2.17  $G(s) = \frac{s+2}{(s^2+s+1)(s+5)} \cdot \frac{5}{2}$  の極、零点の分布



$$(a) G(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1} \cdot \frac{1}{2} \quad (b) G(s) = \frac{s+2}{(s^2+s+1)(s+5)} \cdot \frac{5}{2}$$

図2.18 時間応答波形の比較



#### 4. 2. 3 フィードバック制御系設計の基本指針

ここでは実際に制御器（補償器）を設計していくための基本指針を述べる。制御器は図2.19の点線で囲った部分に入るものなら何でもよい。図2.19では暗黙のうちに閉ループ制御（フィードバック制御）を仮定している。

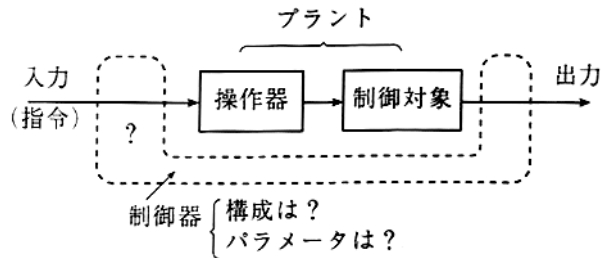


図2.19 制御器の入るところ

##### (1) 開ループ制御と閉ループ制御

制御には、開ループ制御（openloopcontrol）と閉ループ制御（closedloopcontrol）とがあることは前にも述べた。ここで、この両者の特徴をいま一度考えてみよう。

閉ループ制御またはフィードバック制御（feedbackcontrol）には、外乱やパラメータ変動に対して制御誤差を低減できるという利点がある。一方、フィードバック制御系の欠点は安定性を喪失しやすいことである。極端に言えば、この問題をどう解決するかということが、フィードバック制御系の設計そのものである。

はじめに断っておかなければならないのは、開ループ制御は必ずしも閉ループ制御より劣っているわけではないということである。図2.20のクレーンの振れ止め制御では、荷物の重さ $m$ を計測し、荷物の振れが起らないようなクレーンの移動速度や加速度のパターンを計算しておき、これを読み出しながら制御する。これは開ループ制御であり、プログラム制御ということもある。また、鉄鋼の圧延で板厚を制御するとき、あるローラーから出た板厚を計測しフィードバックする方策をとる。ところが、計測される板厚はすでに作ってしまった板の情報であるから、自分のローラーに戻したのでは時間遅れが生じる。そこで、計測した板厚は、次のローラーへ送られ使われる。これはフィードフォワード制御である。このように、実際の制御では開ループと閉ループをあわせて使うことが多い。

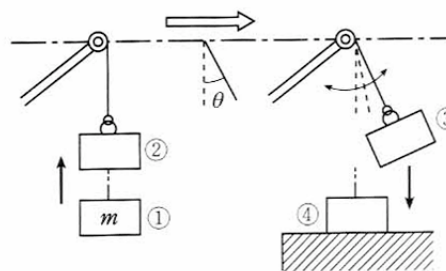


図2.20 クレーンの振れ止め制御（開ループ制御）

##### ・プラント伝達関数 $G_p(s)$ の変化の影響

本題に戻って、プラントの伝達関数が $\Delta G_p(s)$ だけ変動したときに、その影響が出力にどのようにあられるか調べてみよう。

まず，開ループ制御系では，

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{\Delta G_p}{G_p} \quad (2.40)$$

となり，プラント変動はそのまま，出力変動となる。

一方，閉ループ（フィードバック）制御系では，

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \frac{1}{1 + G_c G_p G_F} \frac{\Delta G_p}{G_p} \quad (2.41)$$

であり，フィードバック制御器によって大きく改善されることがわかる。

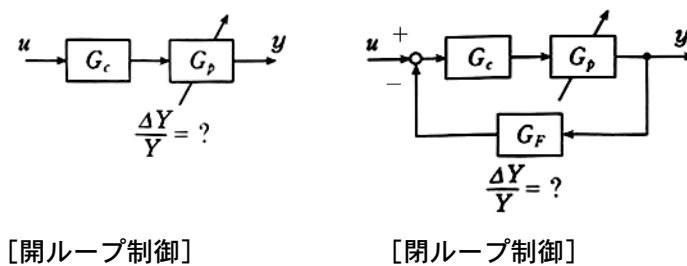


図2.21 プラント変動の影響

・外乱や雑音による誤差

次に図2.22を用いて，外乱や雑音が存在するときその影響が出力にどのように現れるかをみてみよう。外乱や雑音はいくつかの場所に入り，その影響も少しずつ異なる。

まず，開ループ制御系では，

$$Y = G_p G_c N_1 + G_p D_1 + D_2 + G_p G_c U \quad (2.42)$$

となる。

$N_1$ は制御入力の誤差であり高周波分が多い。幸い $G_p G_c$ はローパス特性を持つことが多くその影響は小さい。 $D_1$ は操作器雑音である。 $D_1$ にオフセットがあり， $G_p$ が積分特性をもっているとするとシステムの出力は発散してしまう。 $D_2$ は観測誤差であって，出力に直接効いてくる。

一方，閉ループ（フィードバック）制御系では，

$$Y = \frac{1}{1 + G_c G_p G_F} (G_p G_c N_1 + G_p D_1 + D_2 - G_p G_c G_F N_2 + G_p G_c U) \quad (2.43)$$

である。 $G_c$ または $G_p$ が積分特性を持っていれば，オフセットのようなステップ状の外乱 $D_1 D_2$ による定常誤差を0にすることができる。また，入力誤差 $N_1$ や，フィードバック制御特有の観測雑音 $N_0$ も大きく減衰する。

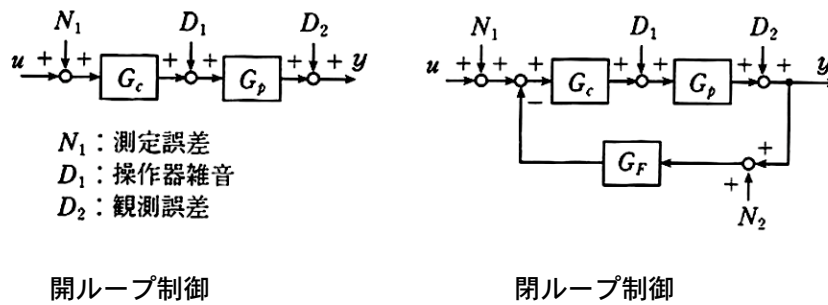


図2.22 外乱や雑音の影響

(2) 制御の型 (Type of control) の分類

制御の型は大別して2とおりまたは3とおりのある。理論上は両者を明確に区別する必要はあまりないが、実用面ではこの違いは重要である。

・ 定値制御 (regulation)

$r(t)=\text{const}$ であるものをいう。ここでは、目標値はあまり速く変化しないので、目標値応答特性は重要ではない。外乱抑圧性能 ( $y/d \rightarrow 0$ ) が重要な性能指標となる。図2.23に示すようなI-PD制御がすぐれた性能を示すものとして知られている。プロセス制御系がほぼこれに相当する。

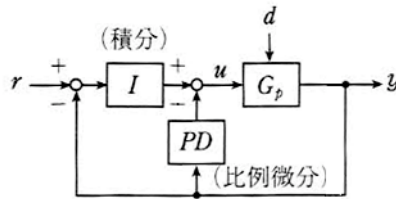


図2.23 I-PD 制御

・ 追従制御 (tracking control/servo control)

目標値  $r(t)$  が常にランダムに変化するものをいう。制御の目標は主として目標値追従特性をよくすること ( $y/r \rightarrow 1$ ) であり、図2.24に示すようなPID制御が古くから知られている。サーボメカニズムともいう。しかし、追従制御においても外乱抑圧は当然必要な項目であり、最近では、ロバストサーボ系という重要な分野がある。

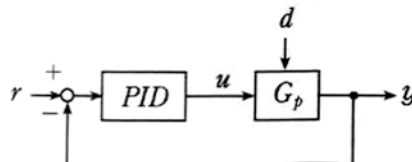


図2.24 PID制御

一般に、同じ外乱抑圧性能の下ではPID制御の方が目標値追従性が良い。もちろん一般的には2自由度PID制御系という構成が可能であるから、定値制御と追従制御をとくに区別する必要はないとも言える。

・プログラム制御 (programmed control)

目標値があらかじめ定まっている場合、すなわち、 $r(t)=\text{given}$ であるものをいう。もうすこし一般的にいうと、定められた手順に従って目標値を切り替えながら制御目的を達するシーケンス制御のようなものも含まれる。

しかし、目標値があらかじめ定まっている場合、もうすこし気の利いた制御も可能である。たとえば、目標値の未来値があらかじめわかるのでそれを利用した「予見制御」、同じ目標値によって同じ動作を何回もくり返すうちにだんだん制御誤差が小さくなっていく「繰り返し制御」などがあり、優秀な制御性能を示すことが知られている。

(3) 設計仕様 (評価基準)

制御器を設計するには仕様を与える必要がある。仕様はまた、できあがった制御系を評価する基準でもあり、定常状態と過渡状態に対するものに分けることができる。

・定常状態の基準

一定の入力指令に対して十分時間が経過したとき、どのくらいの誤差が残るかという指標であり、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{y(t) - r_{\infty}}{r_{\infty}} \right| \quad (2.44)$$

で定義される。 $r_{\infty}$ は、指令値 $r(t)$ の時間 $\infty$ における値であり、たとえば、

$$r(s) = \frac{r_{\infty}}{s}, \frac{r_{\infty}}{s^2}, \frac{r_{\infty}}{s^3}, \dots \quad (2.45)$$

などと表わしたときの係数である。

・過渡状態の基準

図2.25に示すような一般的な応答波形は、立ち上がり時間 $t_r$ 、オーバーシュート $O_v$ 、整定時間 $t_s$ という3個の特徴量を用いて表現することができる。立ち上がり時間 $t_r$ は、制御量が、その目標値の10%から90%までにかかる時間である。このような中途半端な定義をする理由は、原点付近では応答波形がバタバタしたり雑音を含んでいたりして正確に時間の原点を定められなかったり、無駄時間のある系では、無駄時間は別の数値として扱い、立ち上がり時間に含めたくないという事情のためである。

オーバーシュート $O_v$ は行きすぎ量ともいわれ、系の安定度を示す重要な指標である。

整定時間 $t_s$ は、振動が $\pm \varepsilon\%$ に収まる最初の時刻で表わされ、たとえば $\pm 2\%$ の様に定められる。後述するように、2次系では $O_v$ 、 $t_s$ 、 $t_r$ の間には関係がある。

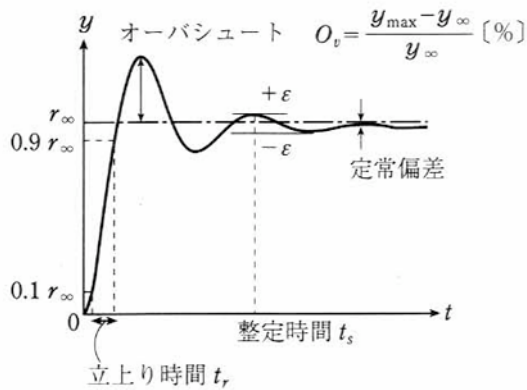


図2.25 制御性能の評価

これらのフィードバック制御系特性の仕様をまとめて、表にしてみよう。

表2.2 制御系の性能指標

	周波数特性	時間応答
安定性	$M_p, g_m, \theta_m$	$O_v$
定常特性	$e_s, e_v, \dots$	
応答速度	$\omega_p$	$t_r, t_s$

これらの値には目安があり、一般に、"よい"制御系の数値は以下のとおりである。

- $M_p = 1.1 \sim 1.5$  (通常1.3くらい)
- $\theta_m = 15^\circ \sim 30^\circ$  (通常20°くらいでよい)
- $g_m = 6 \text{ dB} \sim \infty \text{ dB}$  (通常10dBくらいでよい)
- $O_v = 0 \sim 25\%$  (たとえば20%とする)

#### (4) 直列補償とフィードバック補償

制御系の特性改善に用いられる補償要素（コントローラそのものと言ってもよい）には、制御対象に対して直列に挿入する直列補償と、フィードバック経路に挿入するフィードバック補償とがありどちらもよく用いられる。その具体的な設計は後述するとして、ここではどのような要素があるかをまとめておこう。

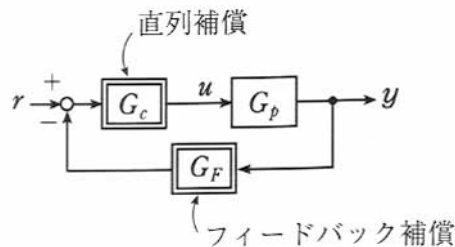


図2.26 直列補償とフィードバック補償

#### ・直列補償

進み補償

$$G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \quad (0 < \alpha < 1) \quad (2.46)$$

遅れ補償

$$G_c(s) = \frac{1+Ts}{1+\alpha Ts} \quad (\alpha > 1) \quad (2.47)$$

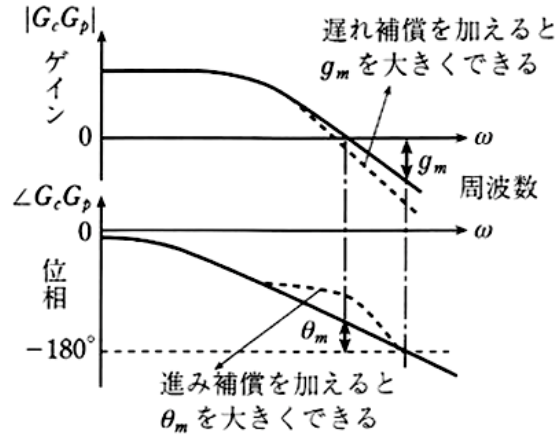


図2.27 遅れ補償，進み補償の効果

おおざっぱに言えば，遅れ補償を加えると  $g_m$  を大きくする効果があり，進み補償を加えると  $\theta_m$  を大きくできる。実際には位相を操作すればゲインも変化してしまうからそう簡単にはいかない。

PID（3動作）調節計

$$\begin{aligned} G_c(s) &= K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s \\ &= K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

という伝達関数をもつ，いわば汎用の直列補償要素である。詳細は後述する。

・フィードバック補償

微分補償とカスケード制御があり，4. 2. 7で詳述する。

・プレフィルタ

目標値の後ろにある伝達関数を入れたり，その伝達関数をプログラム制御する（スケジューリングする）などの方策をとることがある。たとえば航空機は，高度によって操縦桿の効きが変わるので，指令値（目標値）に，高度によって変わるフィルタを入れる。

このような制御系は2自由度制御系的一种である。プレフィルタは，外乱抑圧などの閉ループ特性には全く影響を及ぼさない（何も改善しない）ので，注意が必要である。

4. 2. 4 ニコルズ線図を用いた制御系設計

周波数領域での設計法として代表的なものが，ニコルズ線図（Nichols Chart）による設計である。

コントローラ $G_c(s)$ の設計をするのが目的であるが、ひとまず、 $G_c(s)$ と $G_p(s)$ をひとまとめにして、 $G(s)$ として話をすすめよう。

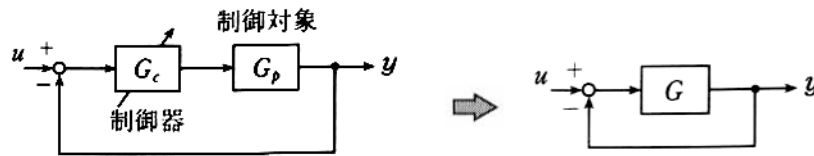


図2.28 コントローラとプラント（ひとまとめにして考える）

(1) 定 $M$ 軌跡と定 $\alpha$ 軌跡

さて、ナイキスト線図のところで述べたように、閉ループ伝達特性

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \tag{2.49}$$

をいつも計算するのは大変面倒なので、「開ループの伝達関数を調べて、閉ループの特性を予測する」という大きな流れに従って以下議論していこう。ある周波数 $\omega$ において、

$$G(j\omega) = x + jy \quad (\text{開ループ特性}) \tag{2.50}$$

$$T(j\omega) = M e^{j\alpha} \quad (\text{閉ループ特性}) \tag{2.51}$$

とすると、周波数測定や、伝達関数モデルにもとづいた計算や計測により、 $x$ や $y$ （もちろん周波数 $\omega$ によって変化する）は容易に求めることができる。

式(2.50), (2.51)を式(2.49)に代入すると、

$$M e^{j\alpha} = \frac{x + jy}{1 + x + jy} \tag{2.52}$$

となる。これを解いて、

$$\left(x + \frac{M^2}{M^2-1}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{M}{M^2-1}\right)^2 \tag{2.53}$$

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2 \tan \alpha}\right)^2 = \frac{1}{4} \frac{\tan^2 \alpha + 1}{\tan^2 \alpha} \tag{2.54}$$

を得る。式(2.53)を「定 $M$ 軌跡」、式(2.54)を「定 $\alpha$ 軌跡」といい、これらを描くとおよそ図2.29のようになる。

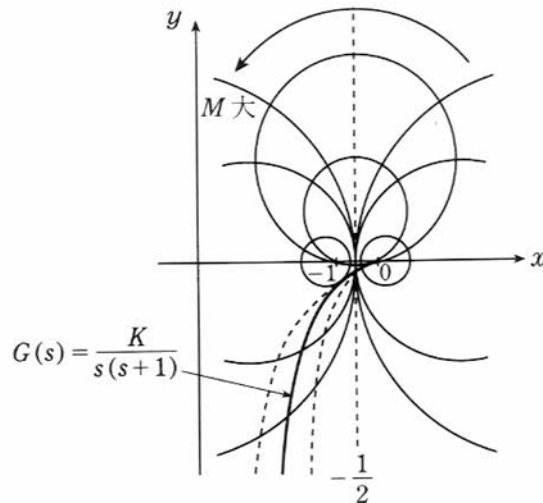


図2.29 定M軌跡と定 $\alpha$ 軌跡

( $G(j\omega)=x+jy$  の  $(x, y)$  を与えると  $T(j\omega)=Me^{j\alpha}$  の  $(M, \alpha)$  が読めるという図である。)

この線図上に、開ループ特性  $G(j\omega)=x+jy$  の軌跡 ( $\omega$  を 0 から  $\infty$  まで変化させる) を与え、定M軌跡、定 $\alpha$ 軌跡との交点を読むことで、閉ループ特性  $T(j\omega)=Me^{j\alpha}$  のパラメータが決められる、ということになる。

## (2) ニコルズ線図

ところが実際の開ループ特性は、図2.29のようにきれいに求められることは少ない。また、ゲイン  $K$  を変えると、その軌跡は非線形に変化するのでいちいち描きなおさなくてはならない。この欠点を解消したのがニコルズ線図である。

開ループ特性のうち、一般に測定しやすいのは振幅  $|G|$  と位相  $\arg G$  であろう。また閉ループ特性は  $T(j\omega)=Me^{j\alpha}$  であるから、 $|G|$  と  $\arg G$  を与えて  $M$  と  $\alpha$  が求められるならばこれは便利である。そこで、 $|G|$  対  $\arg G$  のグラフ上に定M軌跡、定 $\alpha$ 軌跡を描いたのがニコルズ線図なのである。すなわち、ニコルズ線図は、

$$G(j\omega) = |G| e^{j\arg G} \quad (\text{開ループ特性}) \quad (2.55)$$

を与えて、

$$T(j\omega) = Me^{j\alpha} \quad (\text{閉ループ特性}) \quad (2.56)$$

を読むという構造になっている。

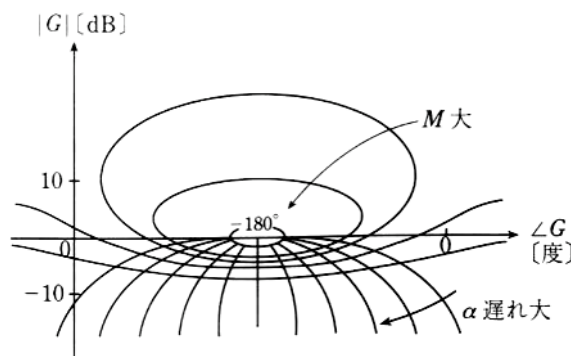


図2.30 ニコルズ線図



この上にいったん開ループ特性を書いてしまえば、後からゲイン  $|G|$  や位相  $\arg G$  を変えるのは特性曲線を上下左右に平行移動するだけでよい。すなわち、 $G(j\omega) = G_c(j\omega) G_p(j\omega)$  とするとき、制御器  $G_c(j\omega)$  の効果は、

- ・ゲインに関しては、各  $\omega$  に対する点を上下にずらすだけ
- ・位相に関しては、各  $\omega$  に対する点を左右にずらすだけ

という簡単な関係がある。

また、この曲線が接する定  $M$  軌跡の  $M$  の値は  $M$  がとりうる最大値（共振ピーク  $M_p$ ）であることもわかる。つまり、周波数特性のピークが簡単に求められるのである。

### (3) ニコルズ線図による設計例

「進み補償」を例にして、ニコルズ線図による設計を具体的に見てみよう。

ただし、制御器のゲイン  $K$  はプラントの方に含め、

$$G_p(s) = \frac{2K}{s(s+1)(s+2)} \quad (2.57)$$

としておく。

・まず、速度偏差  $e_v$  に関する仕様から  $K \geq 1.5$  となる（この詳細は省略）。そこで、 $K=1.5$  のときの  $G_p(j\omega)$  の軌跡を図2.31に描いてみる。 $|G|=0$ 、 $\arg G = -180^\circ$  の点は閉ループ系が不安定になる"危険な点"で、 $G_p(j\omega)$  の軌跡はこの点に近づけたくない。しかし、軌跡は  $\omega$  が1付近の点Aでこの点にかなり近づいている。軌跡に接する定  $M$  曲線の  $M$  を読んでみると非常に大きいから、このままでは非常に大きな周波数特性のピーク  $M_p$  をもち、 $K < 1.5$  としないと  $M_p$  は小さくできないことがわかる。

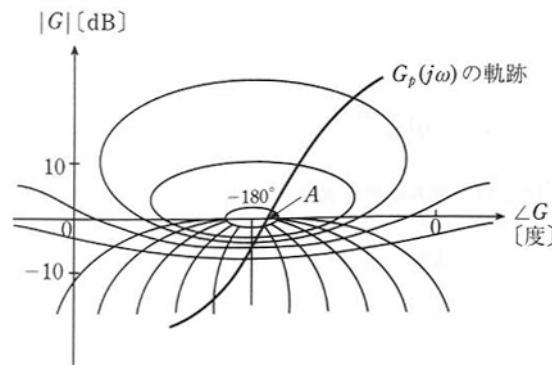


図2.31 ニコルズ線図による設計

しかし、 $K=1.5$  としたのは、速度偏差を67%以下にしたいという仕様に従ったためであるからこれ以上小さくはできない。しかし、このままではあまりに"危険な点"に近く、位相余裕  $\theta_m$  やゲイン余裕  $g_m$  がほとんどないことになる。

- ・そこで、進み補償要素を使うことにする。進み補償要素

$$G_c(s) = \frac{1+\alpha T s}{1+Ts} \quad (2.58)$$

のゲイン・位相特性をおおざっぱに書いてみると、図2.32のようになる。

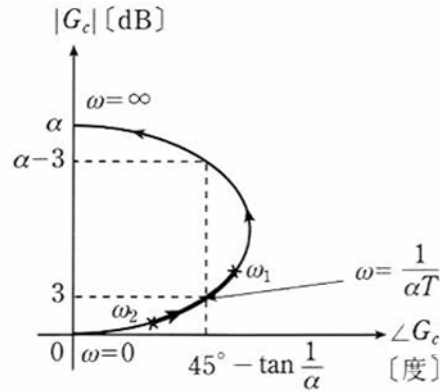


図2.32 進み補償要素のゲイン，位相の周波数特性

ここで、 $\omega = \omega_2 \sim \omega_1$  の太線部分は、「 $|G|$ をあまり変えず， $\arg G$ を右へ大きくずらす」，つまり位相だけを進める「進み補償」の特性となっている。ここで、 $\omega = 1/\alpha T$ の付近で、およそ、

$$\arg G_c(j\omega) = 45^\circ - \tan^{-1}(1/\alpha) \quad (2.59)$$

の関係があることを使って、図2.31の「最も危険なA点 ( $\omega = 1 = 1/\alpha T$ 付近) のあたり」を右へ $40^\circ$ ほどずらすことにする。式(2.59)を $40^\circ$ とおくと、 $\tan^{-1}(1/\alpha) = 5^\circ$ より $\alpha = 10$ なので、 $T = 0.1$ くらいにすると良いことになる。(右へ $40^\circ$ ほどずらすというのは、 $M_p = 1.3$ くらいにしたいという要求からきている。)

以上をまとめると、進み補償要素は、

$$G_c(s) = \frac{1+s}{1+0.1s} \quad (2.60)$$

となるので、あらためて軌跡を描いてみる(図2.33)。

すると新しい軌跡は $M_p = 1.3$ よりも小さい $M_p$ の定 $M$ 軌跡に接するので、もう少し全体のゲインを大きくすることが出来る。そこで、軌跡を上方にシフトして $M_p = 1.3$ に接するようにする。最終的に、 $K = 1.76$ となり、速度誤差は与えられた仕様よりもいいものになり、よい設計ができたことになる。

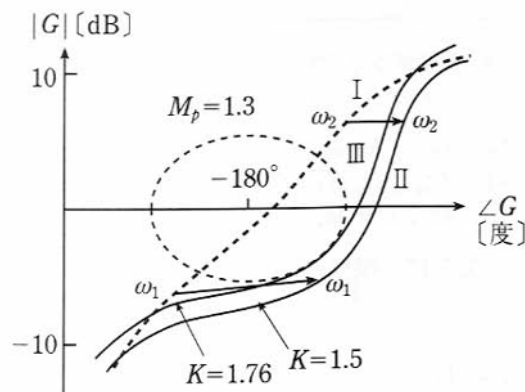


図2.33 進み補償を行ったあとあらためて描いた軌跡

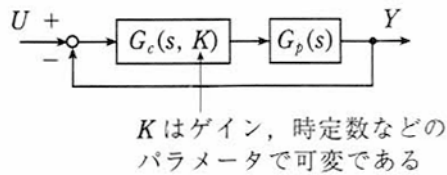
以上がニコルズ線図による設計法である。ここで理解して欲しいことは、この設計手法がかなり「いい加減」であるということである。図を描くときに多少の誤差があっても大きな影響はないであろう。その意味で、制御対象や制御器のパラメータ変動に対するロバスト性を、自然に備えているといえる。

このような「いい加減さ」は、古典的な設計手法に共通のものであり、厳密さには欠けるが、よい意味での人間的な魅力をもっているともいえる。設計者のセンスの良し悪しができあがった制御系の性能に反映される度も大きい。

#### 4. 2. 5 根軌跡を用いた制御系設計

根軌跡法は、あるパラメータ（制御器のゲインとか時定数であることが多い）を連続的に変化させたときの、特性方程式の根の動き（すなわち根軌跡）を調べるものである。開ループの伝達関数を与えて閉ループの伝達関数の性質を調べる、という点では、ナイキストの安定判別法やニコルズ線図による制御系設計と考え方は同じである。

慣れてくると、特性方程式の代表根の位置から時間軸でのステップ応答などを簡単に想像できるようになる。またその他にも多くの有用な情報を読み取ることができるようになるので、実際には非常によく用いられる手法である。



開ループ伝達関数  $G_c(s, K)G_p(s)$  を与え、 $K$  を変化させ、

閉ループ伝達関数  $G_{closed}(s, K) = G_c(s, K)G_p(s) / \{1 + G_c(s, K)G_p(s)\}$  の極がどのように動くかを描く

図2.34 根軌跡法のやっていること

##### (1) 根軌跡法の考え方

さて、例題として、以下のようなフィードバック制御系を考え、ゲイン  $K$  を動かして、閉ループ系の極（すなわち特性方程式の根）の動き（すなわち根軌跡）を調べてみよう。簡単のために、 $G(s) = G_c(s, K)G_p(s)$  とおこう。閉ループ系の伝達関数は、

$$T(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)}, \quad \text{ただし} \quad G(s) = \frac{Z(s)}{P(s)} \quad (2.61)$$

さて、いま調べたいのは、式(2.61)の分母を0とおいた特性方程式

$$P(s) + K Z(s) = 0 \quad (2.62)$$

の根である。

$K$  という変化させる量（すなわち設計の対象となっているパラメータ）は式(2.62)のような形で線形的に含まれればよく、たとえば、

$$G(s) = K \frac{1+2s}{1+10s} \quad (2.63)$$

というような単純なケース以外にも,

$$G(s) = 4 \frac{1+2s}{1+Ks} \quad (2.64)$$

などという形でもよい。むしろ式(2.64)のように、制御器の極や零点をどのように設計しようかという問題の方が、現実にはよくある。

## (2) 根軌跡の性質

ここでは、与えられた $G(s)$ をもとにして、制御器のゲイン $K$ を設計する、もっとも簡単なケース、すなわち、 $1+KG(s)=0$ の根軌跡を調べることにしよう。

まず $G(s)$ の分母多項式 $P(s)$ を,

$$P(s) = K_p \prod_{i=1}^m (s - p_i) \quad (2.65)$$

( $m$ は $G(s)$ の極の数)

分子多項式 $Z(s)$ を,

$$Z(s) = K_z \prod_{j=1}^l (s - z_j) \quad (2.66)$$

( $l$ は $G(s)$ の零点の数)

とおく。

また、 $K' = (K_z/K_p)K$  ( $K' > 0$ ) としておく。

$m > l$ のとき、制御対象は厳密にプロパー (strictly proper) であると言い、 $m \geq l$ のときプロパー (proper) であるという。プロパーというのは、物理的に意味があるという程の意味である。プロパーでないと、純粋微分が必要になり未来値を観測する必要が生じる。いいかえれば因果律が反対になって妙なことになる。世の中に存在する物理システムの伝達関数はプロパーである。

式(2.62)に式(2.65), (2.66)を代入すると、式(2.67)を得る。

$$\frac{\prod_{j=1}^l (s - z_j)}{\prod_{i=1}^m (s - p_i)} = -\frac{1}{K'} \quad (2.67)$$

ここで,

$$\begin{cases} |s - p_i| = |s - p_i| e^{j\phi_i} \\ |s - z_j| = |s - z_j| e^{j\theta_j} \end{cases} \quad (2.68)$$

のように、極、零点と軌跡上の一点を結ぶベクトルを極座標表記をすると、次の二つの条件 (位相条件, ゲイン条件) が得られる。

・位相条件

$$\sum_{j=1}^l \theta_j - \sum_{i=1}^m \phi_i = (2n+1)\pi \quad (2.69)$$

・ゲイン条件

$$\frac{\left| \prod_{j=1}^l (s - z_j) \right|}{\left| \prod_{i=1}^m (s - p_i) \right|} = \frac{1}{K'} \quad (2.70)$$

このうち、根軌跡を描くために用いる性質のほとんどは位相条件から導かれる。ゲイン条件は、軌跡上の各点で $K'$ を求める（すなわち $K$ を求める）ときにだけ使う。

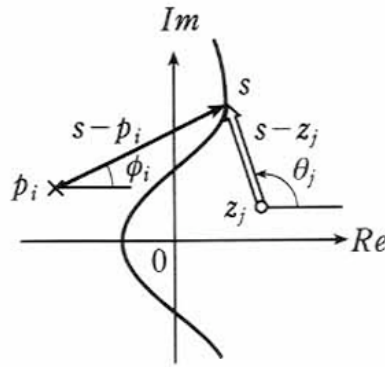


図2.35 極、零点と軌跡上の一点を結ぶベクトルの極座標表記

以下に根軌跡の性質について述べていこう。

[性質1] 軌跡の本数

$K'$ （または $K$ ）を変えると、 $\max(m, l)$ 本の軌跡が得られる。

[性質2] 始点と終点

$K' = 0$ のとき、特性方程式の根は $P(s) = 0$ の根（ $G(s)$ の極）になる。

$K' = \infty$ のとき、特性方程式の根は $Z(s) = 0$ の根（ $G(s)$ の零点）になる。

つまり、 $K' : 0 \rightarrow \infty$ とすれば、根軌跡は、 $G(s)$ の「極から出て零点で終る。」

（注）性質1, 2を考えると、 $m > l$ であるとき、終点となるべき零点が足りない。その場合（ほとんどこのような場合であるが）は、 $m-l$ 個の無限遠点を零点だと考える。すなわち軌跡は無限遠点に発散する。）

[性質3] 軌跡の対象性

根軌跡は実軸対称である。極は実数係数の代数方程式の根であるから、実根か共役複素数（純虚数も含む）である。その集合である根軌跡は実軸対象である。

[性質4] 実軸上の軌跡

実軸上の区間で、その右側に $p_i$ と $z_j$ が合計で偶数個あるとき、その区間には根軌跡が存在する。

[性質5] 漸近線

漸近線は $m-l$ 本存在して、 $\left( \frac{\sum_{i=1}^m p_i - \sum_{j=1}^l z_j}{m-l}, 0 \right)$ を始点とし、傾き $\frac{(2n+1)\pi}{m-l}$ の放射状に広がる直線群となる。

[性質6]

実軸上の離れた2点を出発した根軌跡は、 $K$ の増加とともに接近し、ついには重なり、さ

らに複素平面に出て行く。このような、根軌跡が実軸を離れる点は重根条件から求められる。  
すなわち、

$$P(s)KZ(s)=0 \quad (2.71)$$

$$P'(s)+KZ'(s)=0 \quad (\text{上式を } s \text{ で微分したもの}) \quad (2.72)$$

を連立させて解けば  $K$  と  $s$  が求められる。

[性質 7]

根軌跡が虚軸をよぎる点は、安定限界にあるのだからラウスの安定判別法から求められる。

### (3) 根軌跡による設計例

ひとつ例題をやってみよう。

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + 3s^2 + 2s} \quad (2.73)$$

について具体的に根軌跡を描いてみよう。

[性質 1] 軌跡の本数 =  $\max(3, 0) = 3$  (本)

[性質 2] 軌跡は、

始点→極 (0, -1, -2) に始まり、

終点→零点 ( $\infty, \infty, \infty$ ) に終ある。

[性質 5] 漸近線は、

$$\Sigma \text{極} - \Sigma \text{零} = 0 - 1 - 2 = -3$$

$$\text{極数} - \text{零数} = 3$$

より、(-1, 0) を通り、 $(2n+1)\pi/3 = \pi/3, \pi, 5\pi/3$  の傾きをもつ

[性質 6] 区間 [-1, 0] のどこかで実軸を離れる。重根条件より求めてみる。

$$\text{特性方程式は、} \quad s(s+1)(s+2)+2K=0$$

$$\text{微分して、} \quad 3s^2+6s+2=0$$

この両者を連立させて解けば、 $s = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}$  を得る。

[性質 7] 虚軸をよぎる点は、ラウスの安定判別法で求める。

$$P(s) + KZ(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + 2K = 0$$

$s^3$	1	2
$s^2$	3	2K
$s^1$	6-2K	
$s^0$	2K	

このようにラウスの方法によると、安定条件は、 $K > 0, 6-2K > 0$  となる。従って安定限界は  $K=3$  である。このとき、特性方程式は  $s^3+3s^2+2s+6=0$  となるから、極は  $s = \pm j\sqrt{2}$  となり、系は安定限界にあることがわかる。

以上より、次の根軌跡を得る。

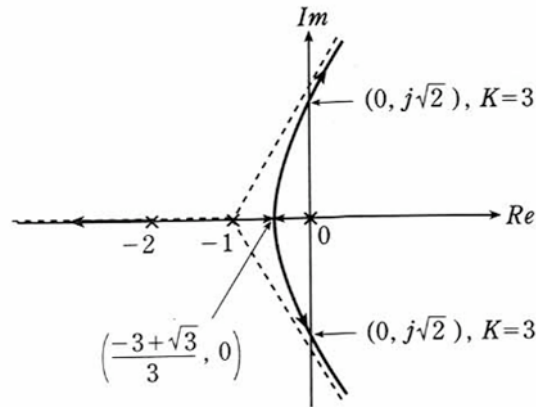


図2.37 根軌跡の例

(4) 制御器の設計

さて、根軌跡を描いただけでは何にもならないのであって、制御器を設計しなければならない。この場合も、代表根の考え方により、2次系の極配置までを考えれば十分である。ここでは、 $0 < \zeta < 1$  のケースを説明する。この範囲に設計することが多いためである。二つの根は、

$$s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad (2.74)$$

であり、ステップ応答

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \cos^{-1} \zeta) \quad (2.75)$$

を描くと図2.38のようになる。

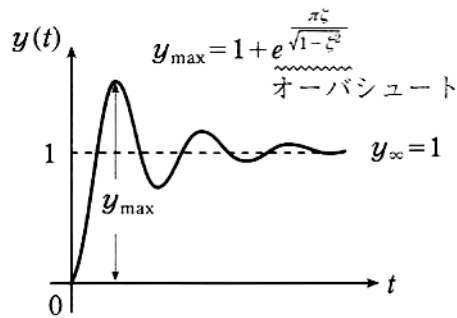


図2.38 ステップ応答

・オーバーシュート

$0 < \zeta < 1$  の場合、2次系のステップ応答は必ずオーバーシュートを生じる。 $dy(t)/dt = 0$  より、

$$t = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.76)$$

で最大値をもち、1よりはみ出す分の大きさ、すなわちオーバーシュートは、

$$O_v = e^{-\frac{\pi \zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \quad (2.77)$$

である。これを図示すれば図2.39のようになり、 $\zeta$ と $O_v$ の関係がわかる。

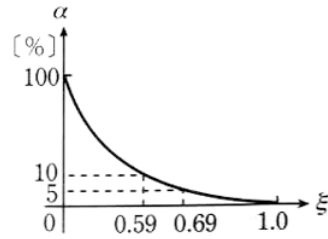


図2.39  $\zeta$ と $O_v$ の関係

極配置と減衰定数の関係はどうなっているのだろうか。極 $s = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$  ( $0 < \zeta < 1$ の場合)を複素平面に図示すると図2.40のようになる。二つの極は $\omega_n$ を半径とする円周上に位置し(従って、円の大きさが応答速度に関係する)、実軸となす角度 $\theta$ が減衰係数に対応する。

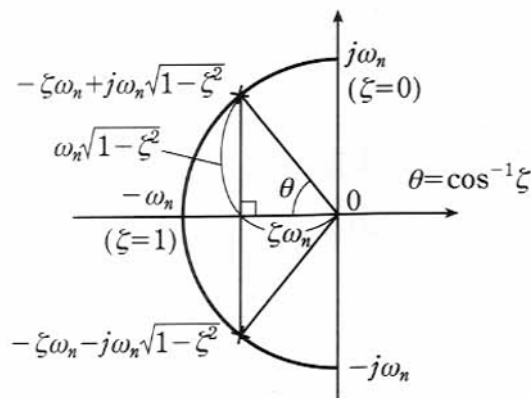


図2.40 2次系の極配置

以上をまとめると、下の表を得る。

表2.3 仕様として与えるオーバーシュート $O_v$ と $\zeta$ ,  $\theta$ の関係

$O_v$	$\zeta$	$\theta$
2	0.78	39°
4	0.72	44°
5	0.69	46°
6	0.67	48°
8	0.63	51°
10	0.59	54°
20	0.46	63°

・  $t_s$  (整定時間)

ステップ応答の包絡線を考えてみると、



$$|y(t) - y_{\infty}| \leq \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq \varepsilon \quad (t \geq t_s) \quad (2.78)$$

となる。 $t$ が $t_s$ を越えると、最終値の $\varepsilon$ [%]以内におさまりもう二度と外には出ないということを表しているの  
で、 $t_s$ のことを整定時間と呼ぶ。

式(2.78)を変形して、

$$\zeta\omega_n t \geq \log \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-\zeta^2} \quad (2.79)$$

となる。 $\varepsilon = 0.02$ とし、 $0 < \zeta < 0.76$  くらいとすると、

$$\zeta\omega_n t \geq 3.9 + \frac{1}{2} \log \frac{1}{1-0.76^2} = 4.3 \quad (2.80)$$

となるので、

$$\zeta\omega_n \geq \frac{4.3}{t_s} \quad (2.81)$$

程度が目安となる。 $\zeta\omega_n$ は極の実部の大きさを表わす。整定時間はその逆数を4倍した程度であるということ  
である。

#### ・ $t_r$ (立ち上り時間)

原点から極がはなれている方が短い。また、プロセス制御などでは、すこしオーバーシュートが多きめの方  
が立ち上がり時間が短いので好まれる。

#### ・ 実軸上の零点

実軸（負）上の零点はオーバーシュートを増加させる傾向にあるが、虚軸から十分離れていれば、ほとんど  
影響はない。右半面の零点は不安定零点と呼ばれることもあり、ステップ応答が、目標値が入力された直後に  
逆方向に応答する（しばらくすると順方向に戻る）ので、応答の概形はあまり変わらない）という特異な現象を  
示すことがある。これを逆応答と呼んでいる。制御系における零点の性質はあまりよく解明されているわけ  
ではなく、現在も研究途上にある。

#### 4. 2. 6 PID調節計

直列補償要素として、最も多く用いられているのは調節計と呼ばれる汎用の制御器（図2.41）であり、かなり古くからプロセス工業におけるプロセスの環境制御、すなわち温度・圧力・流量などの制御の要素として用いられてきた。制御理論が本格的に発達したのは、1935～1940年以後のことであるが、それ以前にもすでに調節計は使用されていた。このころはアナログ電気回路を用いた調節計すらなく、空気圧ないしは油圧を用いた調節計が中心であった。その後、電子技術の発達とともに、電子回路を用いた調節計があらわれるようになり、現在ではマイクロプロセッサを用いたものが、プログラマブルコントローラ（Programmable Controller : PC）と呼ばれてよく用いられている。

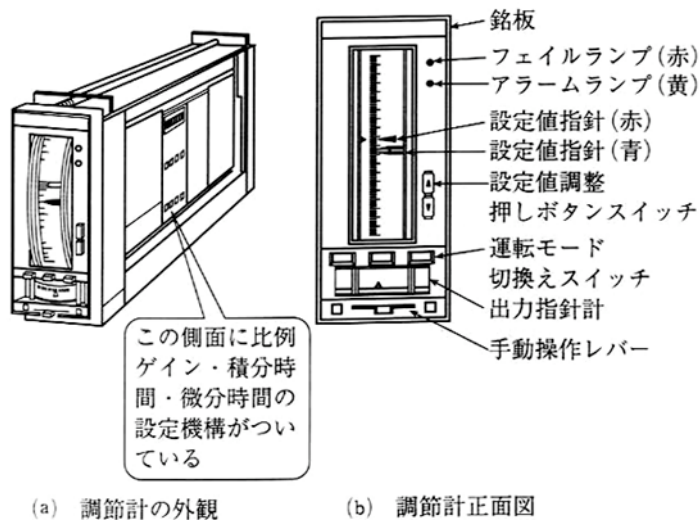


図2.41 電子式PID調節計

##### (1) PID調節計の補償動作

調節計の補償要素としての伝達関数は、近似的には次の形式で表せる。

$$G_c(s) = K_p + K_I \frac{1}{s} + K_D s = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (2.82)$$

この補償動作をみると、調節計出力が誤差に比例する部分、誤差の積分に比例する部分、誤差の微分に比例する部分の三つの和であることがわかる。この三つの動作を、比例動作、積分動作、微分動作とよぶ。そして、この三つの動作をかねそなえた調節計を、よく3動作調節計、あるいはPID（Proportional, Integral and Derivativeの略）調節計とよぶ。

また、このうちの一つまたは二つの動作のみをもつ調節計が考えられる。その伝達関数は以下のようなになる。

P 調節計	$G_c(s) = K_p$
I 調節計	$G_c(s) = \frac{K_p}{T_I s}$
PI 調節計	$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right)$
PD 調節計	$G_c(s) = K_p (1 + T_D s)$

動作の数が少ないほど調節計の構造は簡単となるので、常に3動作調節計を用いるより、制御対象に応じて適当なものを用いるのが得策である。この選択の基準は後述する。なお、調節計という呼び方をしないで、単に制御器と呼んでもよい。

さて、 $K_p$ ,  $T_i$ ,  $T_D$  は次のようによばれる。

$1/K_p$  : 比例帯 (proportional band) といひ百分率表示するのが普通である。このよび方は調節計の構造からつけられたよび方である。しかし、理論上はむしろ  $K_p$  を取り扱う方が多いので、本書では  $K_p$  (比例ゲイン) を用いる。

$T_i$  : 積分時間 (integration time) またはリセット時間 (reset time)

$T_D$  : 微分時間 (differentiation time) またはレート時間 (rate time)

実際には微分の項は高周波で非常に大きな値となるので、高周波ノイズを軽減するため、

$$\frac{T_D s}{1 + \tau s}, \quad \text{ただし,} \quad \tau \approx T_D/10 \quad (2.83)$$

という式を使うことが多い。 $T_D/\tau$  を微分ゲインと呼ぶことがある。 $K_D$  ではないので注意されたい。これは、ステップ状の目標値に対して、微分動作によって  $t=0$  の直後に生じる制御信号の、比例動作による制御信号成分に対する比となっている。

## (2) 調節計の選択

制御対象が与えられると、どのような調節計を用いるべきかがまず問題になる。もちろんどのような場合でも、PID調節計を用いるのが補償の効果という点からは望ましいのであるが、制御対象によっては1動作ないしは2動作しかもたない調節計でもあまり効果が変わらないことがある。そのときは、PID調節計を用いる代わりにより簡単な調節計を用いるほうが、費用も少なくすむし、パラメータの数が少ないので調節が容易である。

どのような選択を行うべきか、制御対象の伝達関数が式(2.84)ないしは式(2.85)の形で近似的に表現できるとしたときの選択基準を図2.42に示す。多くのプロセスの伝達関数はこのような近似が可能であるので、図2.42のような選択基準の利用価値は大きい。

$$G_p(s) = e^{-Ds} \frac{K_p}{(1+T_1s)(1+T_2s)} \quad (2.84)$$

$$G_p(s) = e^{-Ds} \frac{K_p}{1+T_1s} \quad (2.85)$$

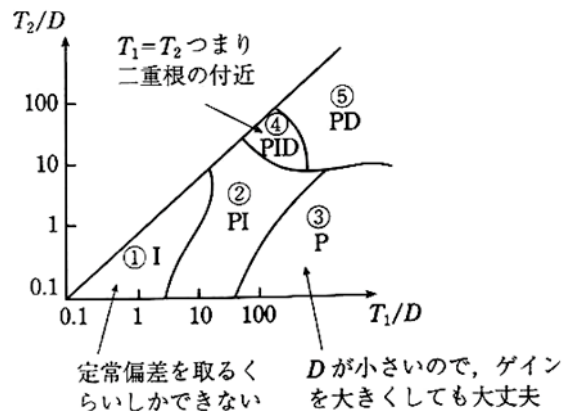


図2.42 PID調節計の選択基準

この図からわかるように、PID調節計が効果を発揮するのは比較的狭い範囲であって、1動作ないし2動作のみの調節計で十分なことが多い。簡単に説明を加えておこう。

①：この範囲は、無駄時間 $D$ によってプロセスの特性が左右される場合である。無駄時間の補償はむずかしく、3動作すべて用いても効果はない。また、この場合ループゲインを上げると系が不安定化しやすいので、定常誤差を低減するにはI動作が必要になる。それゆえI調節計が推奨される。

②：この範囲は、①に比べると無駄時間の効果が比較的小さく、1次遅れ、2次遅れ系としての特性が強くなる。それゆえ、補償が①よりやりやすく、I動作にP動作を加えると効果がかなりあがる。

③：この範囲では、プロセスはほとんど1次遅れの特性をもつので、P動作のみでも比例ゲインを十分高くとれば、安定度を損なうことなく定常誤差を小さくし、応答速度をあげることができる。

④：この範囲では、プロセスは2次遅れに多少無駄時間が加わった特性となる。I動作のみでは応答がおそく、P動作のみでは比例ゲインをあまり上げられないため定常誤差が大きくなる。また、PI動作では応答速度があがらない。この場合は、PID 3動作全部が必要になる。

⑤：この範囲は、無駄時間の影響はほとんどなく、プロセスは2次遅れ系と考えられる。それゆえ、PD動作、すなわち進み特性の補償によって、安定度をそこなうことなく十分高い比例ゲインが得られるので動作の必要性は小さい。

### (3) PIDパラメータの決定法

いったん調節計が与えられると、そのパラメータをどう選定するかが問題になる。パラメータ選定の基準はいろいろな人によって提案されているが、最もよく知られているのがツィーグラ（Ziegler）とニコルズ（Nichols）の限界感度法と過渡応答法である。

#### ・限界感度法

調節計をP動作だけとし（ $T_i$ を最大、 $T_d$ を0とすればよい）、その比例ゲイン $K_p$ を変えて、制御系を安定限界にまでもっていく。この状態で系にステップ入力を与えると、出力は一定振幅で振動を持続する。このときの比例ゲインの値を $K_c$ 、振動周期を $T_c$ とする。すると、調節計の各パラメータは表2.4のように選ばれる。

表2.4 限界感度法によるパラメータ選定基準

	比例ゲイン $K_P$	積分時間 $T_I$	微分時間 $T_D$
$P$ 調節計	$0.5 K_C$	—	—
$PI$ 調節計	$0.45 K_C$	$0.83 T_C$	—
$PID$ 調節計	$0.6 K_C$	$0.5 T_C$	$0.125 T_C$

この方法は、制御対象の特性がほぼ無駄時間と1次遅れで近似できるとし、系の過渡応答の行きすぎ $K_C$ が25%程度となるようにパラメータを選んだものである。この方法の利点は直接制御対象の特性を求めなくとも、フィードバック制御系をつくり上げた後での試験結果から、パラメータの値を決めることである。しかし、反面、系をいったん安定限界にまでもっていくので、試験中は制御対象の状態が大きく乱されてしまう。

したがって、このときは制御対象は通常の操業を行えないことが多い。たとえば、ある反応を行なう化学プロセスでの温度制御系では、このような試験を行うと温度が大きく変わるので、反応の進行が妨害されてしまう。そこで、この場合は試験の際は操業を中止するか、あるいは操業を行なってもその間の操業結果は損失として取り扱うかのいずれかとせざるをえない。これが、この方法の大きな欠点である。

他の欠点としてあげられるのは、しばしば、安定限界がはっきりしないことである。系を安定限界に持っていかうとすると、一般に大振幅動作となって制御対象の非線形動作領域に入ってしまったいたり、操作量に飽和があったりすると、ほぼ一定振幅で振動するような応答となりがちである。制御器のゲインを変えても振幅が変わる程度で発散してしまうようなことはないので安定限界を定めることは意外と難しいことが多い。

#### ・過渡応答法

過渡応答法は、制御対象の伝達関数が近似的に式(2.86)あるいは式(2.87)で表されるとしたときのパラメータ選定法で、この選定基準を表5.4に示す。

$$G_p(s) = e^{-Ds} \frac{1}{1+Ts} \quad (2.86)$$

$$G_p(s) = e^{-Ds} \frac{1}{Ts} \quad (2.87)$$

ツィーグラールとニコルズは、この $D$ と $T$ を求めるために制御対象の過渡応答を測定することを前提としたのでこの名がある。この場合も、できあがった系の過渡応答の $O$ がほぼ25%になるようパラメータが選ばれている。過渡応答の測定は、大振幅で行う必要はなく、測定結果が雑音に埋もれない程度の小振幅で行ったり、数回の測定を重ね合わせて雑音の影響を小さくしたりするなどの工夫をするとよい。

表2.5 過渡応答法によるパラメータ選定基準

	比例ゲイン $K_P$	積分時間 $T_I$	微分時間 $T_D$
$P$ 調節計	$T/D$	—	—
$PI$ 調節計	$0.9 T/D$	$3.3 D$	—
$PID$ 調節計	$1.2 T/D$	$2 D$	$0.5 D$

このように、調節計のパラメータの選び方にはいろいろの方法が考えられる。しかし、いずれの方法にしても、何らかの形で制御対象の特性を求めないと適用できない。ところが、実際の化学工業、製鉄工業などのプ

ロセスでは、このような特性を求めするための試験がプロセスの操業状態を乱すため、実行できないことが非常に多い。また、制御対象の特性も常に一定ではなく、時間的変化を伴うこともあるので、たとえいったん特性を測定しても、その結果がいつも信用できるとはかぎらない。

そのため、これらのパラメータはそれまでの経験に基づいて適当に選定し、制御系をつくり上げ、その制御系の制御状態の記録を見ながら、人間が適当にパラメータを試行錯誤的に変えていくという便宜的な手法がよくとられる。このような調整には熟練を要することも少なくなく、最近では人工知能、ファジー推論などの手段をとることも少なくない。

また、制御対象であるプロセスの操業状態をあまり乱すことなくその特性を測定する手法（システム同定法と呼ばれる）に関する研究開発も盛んになされている。

・部分的モデルマッチング

ここで、北森によって提案された部分的モデルマッチング法について述べておこう。その設計思想には大変興味深いものがある。

まず、上手に設計された制御系の閉ループ特性、つまり目標値から出力値までの望ましい伝達関数  $W(s)$  は、以下のように表現される、と考える。

$$W(s) = \frac{1}{\alpha_0 + \alpha_1 s + \alpha_2 s^2 + \dots} \tag{2.88}$$

これを分母系列表現と言う。ここに、 $s$ は応答の速さを表し、係数の系列  $a_i$ は応答の形を表わす。北森のモデルでは、

$$\{ \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \dots \} = \{ 1, 1, 0.5, 0.15, 0.03, \dots \} \tag{2.89}$$

という系列で与えられる。これを変えれば別の応答波形となる。図2.43に示すように、北森モデルは比較的目立つオーバーシュートが見られるため、たとえば、ロボット制御などの応答モデルには使えない。（壁の直前でアームを止めたいとき、一回壁を壊してから定位されは困る。）しかし、プロセス制御などでは、このくらいオーバーシュートがある方が、立上り時間が短いので好まれる。

興味深いのは、式(2.89)は  $a_0, a_1, a_2$  くらいまでが重要で、 $a_3$ 以上の高次成分の係数はだんだん重要でなくなるということである。

同様にして、制御対象も分母系列で表現する。

$$G_p(s) = \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots} = \frac{1}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots} \tag{2.90}$$

制御器もまた、

$$G_c(s) = \dots + \frac{c_{-1}}{s} + c_0 + c_1 s + \dots = \frac{1}{c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots} \tag{2.91}$$

というように、数個のパラメータを使うことにする。3個だけを使うことにすればPID制御器に対応する。PID制御器はせいぜい3個程度のパラメータで表現できるのであるから、モデルも制御対象も3個程度のパラメータで表現すれば十分であると考ええる。

以上によって、分母系列表現された $W(s)$ と $G_p(s)$ が得られるので、 $G_c(s)$ を好きな次数に選び、

$$W(s) = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} \quad (2.92)$$

に代入し、初めの3項を等置して恒等式として解くのである。(各々3項しか計算しないので部分的モデルマッチング、という。)

この計算は面倒であるが、ただ腕力と根気があれば解くことができ、 $\dots c_{-1}, c_0, c_1, \dots$ が得られる。

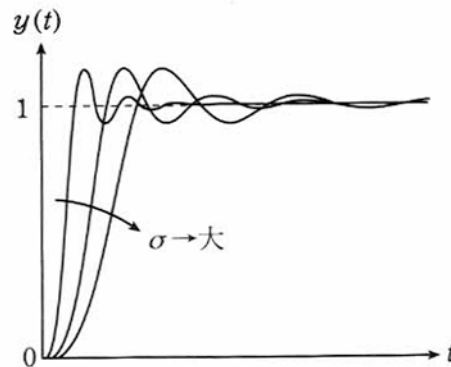


図2.43 北森モデルの応答波形

・真鍋の多項式

上手に設計された制御系の特性方程式が持つべき形には、北森の多項式以外にもいろいろなものが考えられている。真鍋の多項式もそのひとつであり、ケスラー (Kessler) の標準形として知られた形を改良したものである。真鍋の方法は、計数図法とよばれるたいへん統一的な制御系設計法であるが、ここではその一部をとりあげ、理想的な多項式の形だけを説明することにする。

いま分母多項式を、

$$P(s) = \sum a_i s^i \quad (2.93)$$

とし、次式で $\gamma_i$ を定義する。

$$\gamma_i = \frac{a_i^2}{a_{i-1}a_{i+1}} \quad (2.94)$$

ここで、真鍋の与える"よい"多項式とは、

$$\gamma_1 = 2.5, \gamma_2 = \gamma_3 = \dots = 2 \quad (2.95)$$

を満たす多項式である。この形は大変おぼえやすい。また、低次の多項式は、ベッセル (Bessel) 多項式に近くなる。

$$\tau = a_1 / a_0 \quad (2.96)$$

は等価時定数と言われる。もし、系が1次であれば $\tau$ は本当の時定数である。

安定条件は、

$$\gamma_i > 1.5\gamma_i^* \quad (2.97)$$

$$\text{ただし, } \gamma_i^* = \frac{1}{\gamma_{i+1}} + \frac{1}{\gamma_{i-1}}$$

で与えられる。真鍋多項式を $\tau=1$ として具体的に計算してみると,

$$P(s) = 1+s+0.5s^2+0.125s^3+0.0156s^4+0.001s^5 \quad (2.98)$$

となっている。式(2.98)は低い次数から重要であり, 自分が設計時に着目したい次数まで使えばよい。高い方まで正直に合わせることは不可能でもあるし, 式(2.97)の安定条件さえ満たしていればそれほど重要ではない。

#### 4. 2. 7 フィードバック補償

フィードバック補償は, 制御系の中のフィードバック路に補償回路を挿入して系の特性を改善しようというものである。この場合, 制御対象の特性により, また, 系の構造によっていろいろな補償回路が考えられるが, よく用いられる例を二つばかりに次に示そう。

##### (1) 微分帰還

図2.44は, これまでにもしばしば用いてきたサーボ機構のブロック図である。この系の点線部を除いた入出力間の特性は,

$$\begin{aligned} \frac{\theta}{\theta^*} &= \frac{\frac{A_1 A_2 K_m}{s(1+T_m s)}}{1 + \frac{A_1 A_2 K_m}{s(1+T_m s)}} = \frac{A_1 A_2 K_m}{T_m s^2 + s + A_1 A_2 K_m} \\ &= \frac{\frac{A_1 A_2 K_m}{T_m}}{s^2 + \frac{1}{T_m} s + \frac{A_1 A_2 K_m}{T_m}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \end{aligned} \quad (2.99)$$

ただし,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{A_1 A_2 K_m}{T_m}} \quad (2.100)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{A_1 A_2 K_m} \frac{1}{T_m}} \quad (2.101)$$

となっている。

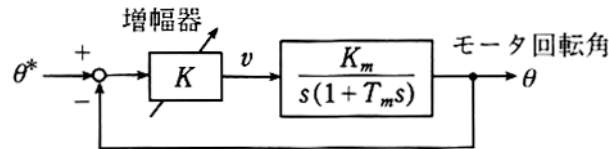


図2.44 サーボ機構

ここで, 応答が振動的にならないように, 減衰定数 $\zeta$ を一定値 $\zeta_0$ に選ぶと, 式(2.100), (2.101)から, 固有周波数は,



$$\omega_n = \frac{1}{2\xi_0 T_m} \quad (2.102)$$

系のループゲインは、

$$A_1 A_2 K_m = \frac{1}{4\xi_0^2 T_m} \quad (2.103)$$

と、いずれも  $T_m$  によって制限されてしまうことがわかる。そこで、この系の特性を改善する最も効果的な方法は  $T_m$  を低減することであって、これを実効的に行なうのが微分帰還である。

この方法は、原理的には、図2.45の点線のように出力の微分に比例した信号をとりだしてフィードバックするのであるが、実際には電動機軸に直結した速度発電機（タコメータ）を用いる。タコメータの出力電圧は、回転速度、すなわち  $d\theta/dt$  に比例するためである。

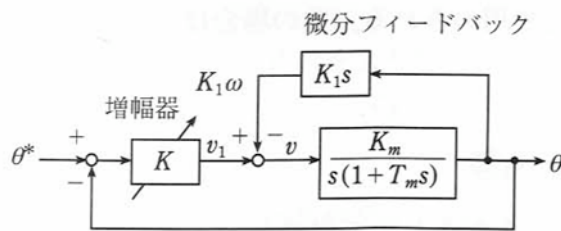


図2.45 微分補償

図2.45で微分帰還を用いた場合、増幅器の出力  $v_1$  から  $\theta$  までの伝達関数を求めてみよう。

$$\frac{\theta(s)}{v_1(s)} = \frac{\frac{A_2 K_m}{s(1+T_m s)}}{1 + \frac{A_2 K_m K_t s}{s(1+T_m s)}} = \frac{A}{s(1+T_m' s)} \quad (2.104)$$

ここに、

$$A = \frac{A_2 K_m}{1 + A_2 K_m K_t} \quad (2.105)$$

$$T_m' = \frac{T_m}{1 + A_2 K_m K_t} \quad (2.106)$$

すなわち、このときは上記からわかるように、時定数  $T_m$  は  $1/(1+A_2 K_m K_t)$  倍に減少する。系の固有周波数は上がり、小さなモータに見えるようになるわけである。ゲインも減少するが、これは増幅器1のゲイン  $A_1$  を大きくすることにより補償できる。

式(2.106)をみると、 $T_m'$  をいくらでも小さくできるように思われるが、実際には電動機の特性が完全には線形でないこと、その他の理由である程度以上は小さくできない。しかし、微分帰還はサーボ機構の特性改善には簡単で有効な手段であって、広く用いられてきた。

モータの場合、 $\theta$  に対しその微分である回転速度はタコメータで直接得られるので、実際位置の計測値から微分によって求める必要はない。そこで、タコメータ・フィードバックとも呼ばれる。ただ、最近はブラシ（直流器）を用いたタコメータは嫌われる傾向にあり、代わりに光学式のシャフトエンコーダが好んで用いら

れる。その場合は、位置情報の微分（差分）を計算する必要がある。

(2) カスケード制御とマイナー制御ループ

いま、図2.46のようなきわめて単純な1次遅れの対象があるとする。これを増幅器を用いてフィードバックをかけてやると、 $x(t)$ から $y(t)$ までの伝達関数は次のように変わる。

$$\frac{y(s)}{x(s)} = \frac{\frac{K_1 K}{1+\beta s}}{1 + \frac{K_1 K}{1+\beta s}} = \frac{K'}{1+\beta' s} \tag{2.107}$$

ただし

$$K' = \frac{K_1 K}{1+K_1 K} \tag{2.108}$$

$$\beta' = \frac{\beta}{1+K_1 K} \tag{2.109}$$

すなわち、フィードバックによって対象の時定数は明らかに減少することがわかる。

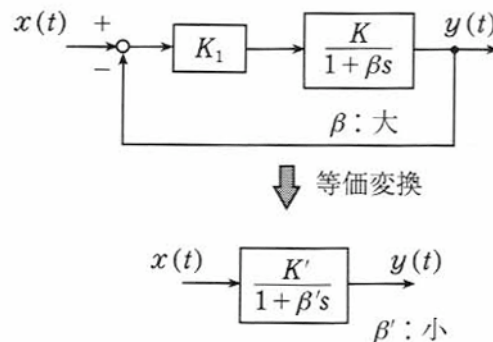


図2.46 マイナー制御ループの効果

また対象のゲイン $K$ が変化し、 $K+\Delta K$ になったとすると、対応する $K'$ の変化は、式(5.85)から、

$$\begin{aligned} \Delta K' &\cong \frac{\partial K'}{\partial K} \Delta K \cong \frac{K_1}{(1+K_1 K)^2} \Delta K \\ \therefore \frac{\Delta K'}{K'} &\cong \frac{1}{1+K_1 K} \frac{\Delta K}{K} \end{aligned} \tag{2.110}$$

となる。

この式からわかるように、フィードバックを行うと、ゲインの変化率も減少する。このような性質はすでに述べたことであって、フィードバックのもつすぐれた特徴の一つである。

さて、フィードバックによって時定数やゲインの変化率がともに減少する性質は、フィードバック系の特性補償に用いることができる。たとえば、図2.46のように、一つの部屋の温度制御を温風の温度の調節によって行うとしよう。このとき、風は弁から管を通して部屋に流れ込むが、ヒータへの信号から部屋入口温度までの時間遅れは大きいし、風の流れ方によりその間のゲインは、時によりかなり変化する。そのため、もしこのま

ま部屋の温度 $T_0$ を検出し、指定温度 $T^*$ との差によりヒータを動かすという通常のフィードバック制御を行うと、安定度にかなり余裕をとって制御系を設計しなくてはならない。また、もともとヒータ動作信号から図の $T_0$ までの間にかんりの遅れがある。このような二つの理由から系の応答速度はかんり遅くなってしまふ。

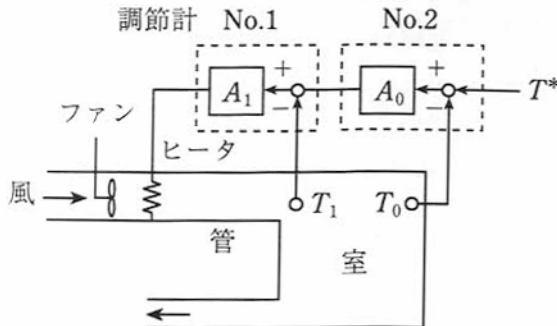


図2.47 部屋の温度制御

そこでこのときは、図2.47のように、ヒータから部屋入口の風の温度までの部分を取り出し、ローカルなフィードバックをかけるのである。こうすればこの部分のゲインは一定化して時定数も小さくなるから、全系の応答速度を上げることができる。

この場合は調節計が図のように二つ使われ、No.2の調節系出力がNo.1の調節計の入力になっている。このように、一つの調節計で操作部の特性を改善し、もう一つの調節計で全系の特性補償を行なう制御方式を、カスケード制御 (cascade control) とよんでいる。

このようなカスケード制御の考え方は、一般のフィードバック制御系に広く利用できるものである。たとえば、サーボモータの制御では、図2.48に示すように、電流、速度、位置という3重の制御ループを組むことが普通に行われる。最も内側の電流制御ループは、電力変換器の非線形性や電動機パラメータの変動の影響を殺し、指令通りの電流をモータに流し込む大切な役割を担っている。このような閉ループのことを、「マイナー制御ループ」と呼び、これを接続していったものが「カスケード制御」であるということもできる。

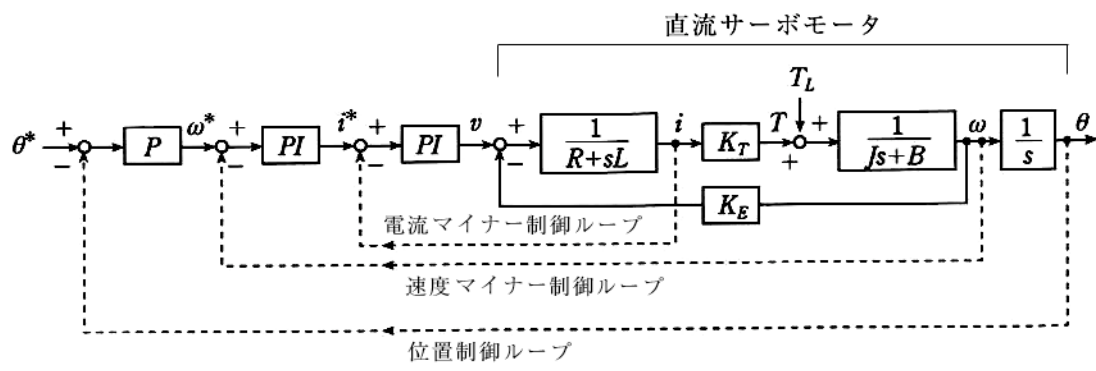


図2.48 多重制御ループによるサーボモータの制御系