

### 4. 3 状態空間法

#### 4. 3. 1 状態変数と状態方程式

現代制御理論の特徴は、システムを状態方程式というもので記述することである。これに対し、古典制御理論では、システムの入出力関係に着目し、主として伝達関数を用いた周波数領域での記述に基礎をおいていた。状態空間法では、図3.1のように、システムの動きを状態変数の状態空間内での移動ととらえる。

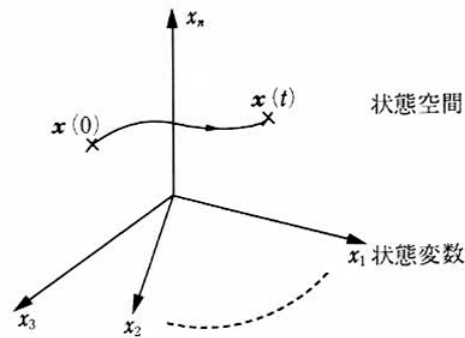


図3.1 状態変数の作る空間内の軌跡

#### (1) 電車の例題

電車がある駅を出て隣の駅まで移動するとき、加速力（減速力） $f$ に  $|f| < M$  という制限がある場合、最短時間で隣の駅に「速度0で到着する」にはどのような加減速をすればよいであろうか。（この答えは直感的には明らかである。すなわち、最大加速で駅を出発し、ある時点で最大減速に切り替えるバンバン制御となる。）

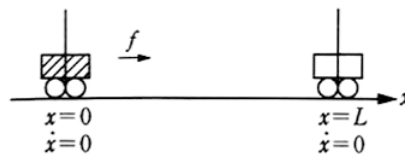


図3.2 駅間を最短時間で移動する

このシステムの運動方程式は、

$$m \ddot{x} = F \quad \therefore \ddot{x} = \frac{F}{m} = f \quad (3.1)$$

である。ここで、 $x$ と $\dot{x}$ を $x_1, x_2$ と表記して「状態変数」と呼ぶことにしよう。すると、

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

なる「状態変数ベクトル」は、この系のあるひとつの状態を示していることになる。

例題の場合は、系の次数が2であるから、状態変数2個を用いて系の挙動を完全に記述することができる。

駅間の移動は2次元の状態空間内の2点間の移動, すなわち,

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow x(T) = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

ととらえることができる。

また,

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = f \quad (3.4), (3.5)$$

という状態変数の1階連立微分方程式を「状態方程式」という。この系の動きは, 式(3.4),(3.5)に従わなければならない。 $f$ は制御入力変数で, その調節によって系の動きを制御することができる。

一般には, 状態方程式は,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (3.6)$$

と記述される。 $x$ が状態変数であり,  $u$ が制御入力変数である。

状態空間法は, 1960年頃にできた新しい学問であり, カルマンフィルタで有名なカルマンが基礎をつくったものである。歴史としてはデジタル制御などの方が古い。状態空間法は, 最適制御や現代制御理論とよく混同されるが, 実際には少し違う。現代制御理論の中に状態空間法があり, 状態空間法の中に最適制御がある。

古典制御の特徴と, 現代制御の特徴を簡単な表にすると以下のようになる。

|      |                |         |
|------|----------------|---------|
| 古典制御 | 周波数領域での設計      | 1入力1出力系 |
| 現代制御 | 時間領域(状態空間)での設計 | 多入力多出力系 |

なお, その後に生じた新しい潮流は,

|         |           |         |
|---------|-----------|---------|
| ポスト現代制御 | 周波数領域での設計 | 多入力多出力系 |
|---------|-----------|---------|

とまとめることができる。「ポスト現代制御」は「新しい現代制御」である。

## (2) 非線形状態方程式

状態方程式を非常に一般的に書けば,

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \quad (3.7)$$

$$y = g(x, u) \quad (3.8)$$

である。2番目の式(3.8)は出力方程式と呼ばれる, ダイナミクスをもたない静的な関係式である。 $y$ を出力変数という。

これらを分解して書けば,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \\ \vdots \\ y_l = g_l(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \end{cases} \quad (3.10)$$

である。

ところで、状態方程式は $x$ に関する1階の微分方程式であるが、2階以上の微分が出てきた場合には、新しい状態変数を作ればよい。たとえば、

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = u \quad (3.11)$$

$$y = b_1\dot{x} + b_0x \quad (3.12)$$

という2階の微分方程式で表わされる系では、 $x=x_1$ ,  $\dot{x}=x_2$ とすればよいのである。

### (3) 線形状態方程式

さて、当面われわれは、この状態方程式を線形に限って見ていくことにする。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.13)$$

$$y = Cx + Du \quad (3.14)$$

これを線形状態方程式という。これは、一般の非線形システムにおける、ある動作点まわりの摂動システムであると考えれば、

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B = \frac{\partial f}{\partial u}, \quad C = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad D = \frac{\partial g}{\partial u} \quad (3.15)$$

として得られる。 $A$ の内容を具体的に書くと、

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \ddots & & & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

となる。 $B$ ,  $C$ ,  $D$ も同様である。

線形状態方程式、出力方程式の、ベクトルや行列のサイズは以下の通りである。

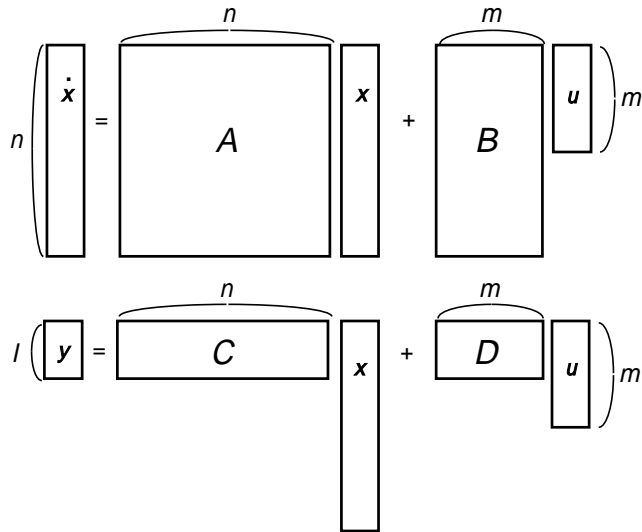


図3.3 線形状態方程式のマトリクスサイズ

この状態方程式表現をブロック図で書いたのが図3.4である。結局のところ、入力 $u$ が入って出力 $y$ が出ているシステムであることには変わりがない。その中身を状態変数というものを使って詳細に書いただけであるということがみてとれるであろう。 $I$ は単位行列である。ただし、 $u$ も $y$ もベクトルではある。

また、入力 $u$ が入って出力 $y$ が出るのであるから、ひとつひとつの入力から全部の出力への伝達関数を並べれば、入出力関係を表現することができる。これは、伝達関数行列となる。

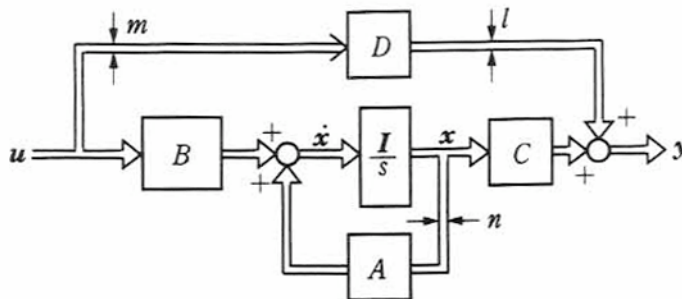


図3.4 線形状態方程式のブロック図表現

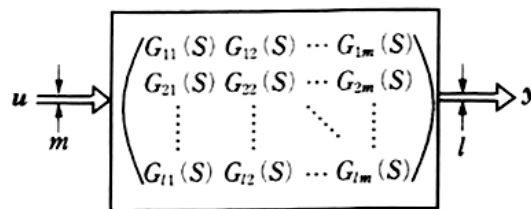


図3.5 伝達関数行列との対応

#### 4. 3. 2 状態方程式と伝達関数との相互変換

図3.4の状態方程式表現と、図3.5の伝達関数行列とは相互に変換可能である。

(1) 状態方程式から伝達関数への変換

状態方程式から伝達関数への変換は簡単である。まず、状態方程式、

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}u(t) \quad (3.17)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}u(t) \quad (3.18)$$

をラプラス変換する。

$$s\mathbf{X}(s) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}U(s) \quad (3.19)$$

$$\mathbf{Y}(s) = \mathbf{C}\mathbf{X}(s) + \mathbf{D}U(s) \quad (3.20)$$

式(3.19)より、

$$\begin{aligned} (s\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X}(s) &= \mathbf{B}U(s) \\ \therefore \mathbf{X}(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) \end{aligned} \quad (3.21)$$

式(3.20)に代入して、

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}(s) &= \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}U(s) + \mathbf{D}U(s) \\ &= \{ \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \} U(s) \end{aligned} \quad (3.22)$$

となるから、伝達関数行列は、

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.23)$$

となる。

例題をひとつ示す。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u \\ y &= (6 \ 7) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

のとき、伝達関数行列  $G(s)=Y(s)/U(s)$  (この場合はスカラー) をもとめてみよう。

$$\begin{aligned} G(s) &= (6 \ 7) \left\{ \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \right\}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{6s - 2}{s^2 - 7s - 2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

となる。

次に、図3.6の直流サーボモータを考えてみよう。

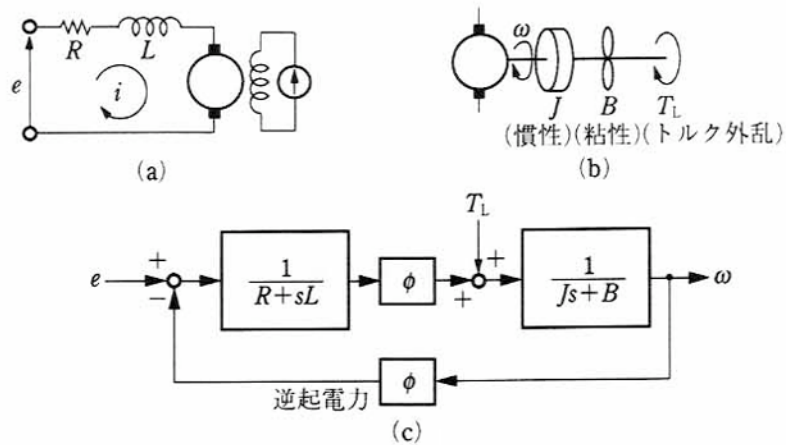


図3.6 直流サーボモータとそのブロック図

この系の状態変数は,

$$x = (i \ \omega)^T \quad (3.26)$$

入力は,

$$u = (e \ T_L)^T \quad (3.27)$$

出力は,

$$y = x = (i \ \omega)^T \quad (3.28)$$

としよう。本当は $T_L$ は外乱入力であって制御入力ではないが、ここでは伝達関数行列を求めるだけだからまとめて入力として扱っておく。まず、ブロック線図から状態方程式に直す。そのためには、信号の重ね合わせ点の関係を書き下せばよく、

$$\begin{aligned} e - \phi \omega &= (R + sL) i \\ &= Ri + L \dot{i} \\ \therefore \dot{i} &= -\frac{R}{L} i - \frac{\phi}{L} \omega + \frac{1}{L} e \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \phi i + T_L &= (Js + B)\omega \\ &= J \dot{\omega} + B\omega \\ \therefore \dot{\omega} &= \frac{\phi}{J} i - \frac{B}{J} \omega + \frac{1}{J} T_L \end{aligned} \quad (3.30)$$

従って、状態方程式は,

$$\begin{pmatrix} \dot{i} \\ \dot{\omega} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{\phi}{L} \\ \frac{\phi}{J} & -\frac{B}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ \omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ T_L \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

となる。さて、こうなってしまうと、伝達関数行列 ( $e$ と $T_L$ から $i$ と $\omega$ までの4つの伝達関数),

$$\begin{pmatrix} I(s) \\ \Omega(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(s) \\ T_L(s) \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

は機械的に求めることができるのである。ブロック図の変換などを行って一つずつ求めるのに比べれば、はるかに手間も間違いも少ないであろう。

## (2) 伝達関数から状態方程式への変換

$G(s)$ に対する $A, B, C, D$ の組みを求める問題は、実現問題といわれる。前節で見たように、状態方程式が与えられると伝達関数行列は一意に求められるが、逆に、ある $G(s)$ を与えても、それを実現する $A, B, C, D$ の組みは無限に存在する。

そのうち、われわれはいくつかの標準形を準備しており、これを用いて表現することが多い。

1. 可制御標準形 (controllable canonical form)
2. 可観測標準形 (observable canonical form)
3. 対角標準形 (diagonal canonical form)
4. 平衡形実現 (balanced realization) などがある。

### ・可制御標準形による実現

例題を用いて、可制御標準形による実現を求めてみよう。

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10(s+4)}{s(s+1)(s+2)} \quad (3.33)$$

という伝達関数で表される系の状態方程式表現を求めよう。式(3.33)から、

$$\frac{U(s)}{s(s+1)(s+2)} = \frac{Y(s)}{10(s+4)} = X(s) \quad (3.34)$$

となる。 $X(s)$ という中間変数を作っているが、これは状態変数に相当する。

$$\frac{U(s)}{s(s+1)(s+2)} = X(s) \quad (3.35)$$

より、

$$\begin{aligned} s^3 X(s) + 3s^2 X(s) + 2s X(s) &= U(s) \\ \therefore sX_3(s) &= -2X_2(s) - sX_3(s) + U(s) \end{aligned} \quad (3.36)$$

ただし、 $X(s) = X_1(s)$ とし、

$$sX_1(s) = X_2(s) \quad (3.37)$$

$$sX_2(s) = X_3(s) \quad (3.38)$$

とおいている。一方、

$$\frac{Y(s)}{10(s+4)} = X(s) \quad (3.39)$$

からは、





・可観測標準形

可観測標準形は、可制御標準形で得られた  $(A, B, C)$  の組み

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + \mathbf{b}u \quad (3.48)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (3.49)$$

(ただし、1入力1出力系としている。)

に対して、

$$\dot{\mathbf{x}} = A^T \mathbf{x} + \mathbf{c}^T u \quad (3.50)$$

$$y = \mathbf{b}^T \mathbf{x} \quad (3.51)$$

として求めることができる。

・対角標準形

一例を示しておこう。先ほどと同じ数値例であるが、今度は分母の因数分解を使って展開する。

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10(s+4)}{s(s+1)(s+2)} \\ &= \frac{20}{s} - \frac{30}{s+1} + \frac{10}{s+2} \end{aligned} \quad (3.52)$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{20}{s}U(s) - \frac{30}{s+1}U(s) + \frac{10}{s+2}U(s) \\ &\equiv 20X_1(s) - 30X_2(s) + 10X_3(s) \end{aligned} \quad (3.53)$$

ここで、

$$\begin{aligned} X_1(s) &= U(s)/s \\ X_2(s) &= U(s)/(s+1) \\ X_3(s) &= U(s)/(s+2) \end{aligned} \quad (3.54)$$

とおいている。従って、時間次元にすれば、

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ \dot{x}_3 &= -2x_3 + u \end{aligned} \quad (3.55)$$

$$y = 20x_1 - 30x_2 + 10x_3 \quad (3.56)$$

マトリクス表現すると、

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (3.57)$$

$$y = \begin{pmatrix} 20 & -30 & 10 \end{pmatrix} \mathbf{x} \quad (3.58)$$

となる。システム行列の対角要素にはシステムの根が並ぶ。もし、重根がある場合はジョルダン・ブロックという少し複雑な形になる。

・平衡形実現

実現法はこの他にもいろいろある。有限語長のマイコンで制御器を実現したりするときや、デジタルフィルタを実現したりするときには、できるだけ量子化誤差の影響を少なくしたいことがよくある。そのようなときに有効な実現法として平衡形実現が知られているが、本書のレベルを越えるので省略する。状態変数の選び方によって、実現法は無限にあることだけ認識しておいてほしい。

#### 4. 3. 3 状態方程式の基礎的性質

ここでは状態方程式の基本知識を簡単に説明しておく。

##### (1) 遷移行列

状態変数の初期値が $x(0)$ で与えられるとき、スカラーの微分方程式の解の類推から、状態方程式

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.59}$$

の解は、

$$x(t) = e^{At}x(0) + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \tag{3.60}$$

という形になると考えられる。ここで、 $e^{At}$ という見慣れないものは遷移行列 (transition matrix) と呼ばれる行列であり、次の式で定義される。

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!} t^i \tag{3.61}$$

実際にはこの式を計算することはなく、以下のようにしてもとめる。状態方程式(3.59)をラプラス変換すると、

$$\begin{aligned} sX - x(0) &= AX + BU \\ \therefore (sI - A)X &= x(0) + BU \\ \therefore X &= (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU \end{aligned} \tag{3.62}$$

これを逆ラプラス変換した

$$x(t) = \mathbf{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}]x(0) + \mathbf{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}BU] \tag{3.63}$$

は直接解いた式(3.60)に一致するはずである。

式(3.63)と式(3.60)を比較することにより、遷移行列は、

$$e^{At} = \mathbf{L}^{-1}[(sI - A)^{-1}] \tag{3.64}$$

で与えられることがわかる。例をひとつ示す。

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

のとき、 $e^{At}$ を求めてみる。

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1} &= \begin{pmatrix} s+1 & -1 \\ 0 & s+2 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \begin{pmatrix} s+2 & 1 \\ 0 & s+1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\therefore e^{At} = L^{-1}[(sI - A)^{-1}] = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \quad (3.67)$$

## (2) 離散時間制御系の状態方程式

マイコンのようなデジタル制御装置を用いてモータなどの物理系を制御するためには、まず、連続時間システムを離散時間システムの状態方程式で表現する必要がある。つまり、

$$x(k+1) = F x(k) + G u(k) \quad (3.68)$$

のような形で書きたいわけである。

いま $i$ を $t=iT$ なる時刻表わす記号とし、 $T$ 秒間隔でサンプリングが行われているとしよう。

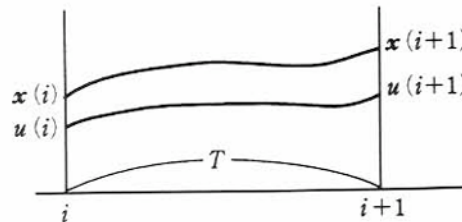


図3.7 ある区間での物理システムのふるまい

図3.7において、時刻 $t=(i+1)T$ での状態変数の値は、時刻 $t=iT$ での値を初期値とし、遷移行列を用いて、

$$x(i+1) = e^{AT} x(i) + \int_{iT}^{(i+1)T} e^{A[(i+1)T-\tau]} B u(\tau) d\tau \quad (3.69)$$

となる。

ここで、マイコンのような制御装置を想定しているので、その出力する制御信号（制御されるシステムにとっては制御入力となる） $u(t)$ はひとつの制御区間では一定値をとる（図3.8を参照）。

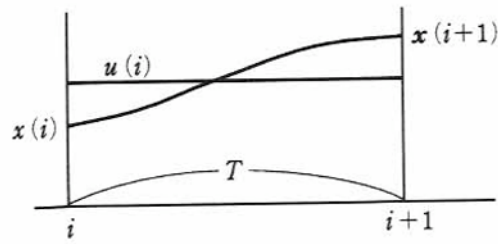


図3.8 連続時間システムの離散時間コントローラによる制御

このとき、この区間では、 $u(t)=u(i)$ （一定値）としてよいから、

$$\begin{aligned} x(i+1) &= e^{AT}x(i) + \int_{iT}^{(i+1)T} e^{A[(i+1)T-\tau]} B u(i) d\tau \\ &= e^{AT}x(i) + \int_0^T e^{At} dt B u(i) \end{aligned} \quad (3.70)$$

となる。従って、離散時間システムの状態方程式を与える行列は、

$$F = e^{AT} = \mathbf{L}^{-1} [(sI - A)^{-1}] \Big|_{t=T} \quad (3.71)$$

$$G = (e^{AT} - I) A^{-1} B \quad (3.72)$$

となる。

### (3) 可制御性と可観測性

可制御性 (controllability) と可観測性 (observability) は古典制御にはなかった概念で、文字どおり、そのシステムが制御可能であるかどうか、状態変数が推定可能であるかどうかを判定する重要な指標である。

可制御性は、「システムの状態を任意の初期状態 $x(0)$ から、任意の時刻 $t>0$ において、 $x(t)=0$ とする入力 $u(t)$ 、 $0 \leq t < t_f$ が存在するための条件」と定義され、

$$Q = [b \quad Ab \quad A^2b \quad \cdots \quad A^{n-1}b] \quad (3.74)$$

なる可制御行列のrankが $n$ であるとき、システムは可制御であるという（必要十分条件）。

また、可観測性は、「出力 $y(t)$ を $0 \leq t < t_f$ の間観測して、時刻0における初期状態 $x(0)$ を決定することができるための条件」と定義され、

$$R = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

なる可観測行列のrankが $n$ であれば、システムは可観測であるという（必要十分条件）。

さて、可制御性の条件の証明を、離散時間システムについて示しておこう。（この場合は離散系の方が説明が直観的にわかりやすく、本質は連続時間系でも同じであるためである。）離散時間システムの状態方程式を、

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) \tag{3.76}$$

と書こう。初期値 $x(0)$ から始めて、時間を追って状態変数の値を書き下していく。

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 \\ x(1) &= Ax_0 + bu(0) \\ x(2) &= Ax(1) + bu(1) = A^2x_0 + Ab u(0) + bu(1) \\ x(3) &= Ax(2) + bu(2) = A^3x_0 + A^2bu(0) + Ab u(1) + bu(2) \\ &\vdots \\ x(n) &= Ax(n-1) + bu(n-1) \\ &= A^n x_0 + A^{n-1}bu(0) + A^{n-2}bu(1) + \dots + Ab u(n-2) + bu(n-1) \end{aligned} \tag{3.77}$$

さて、最後の式において、いかなる $A^n x_0$ に対しても（すなわち、いかなる $x_0$ に対しても）、 $x(n)=0$ となる入力、 $u(0), u(1), u(2), \dots, u(n-1)$ が存在するためには、その係数ベクトルである、

$$A^{n-1}b, A^{n-2}b, \dots, Ab, b$$

が一次独立であればよい。これは、 $Q$ のランクが $n$ になるという条件そのものである。

#### (4) 安定性

システムの安定性については、古典制御においては、伝達関数の極の実部がすべて負であることとして定義した。状態方程式表現においては、この条件は、

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.78}$$

において、 $u=0$ としたとき、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \tag{3.79}$$

という漸近安定性 (asymptotically stable) におきかえられる。具体的には、システム行列 $A$ の固有値の実部が全て負であることと等価である。

また、離散時間 (サンプル値制御) システムにおいては、システム行列 $F=e^{AT}$ の固有値の大きさが1以下であることが安定性の条件となる。

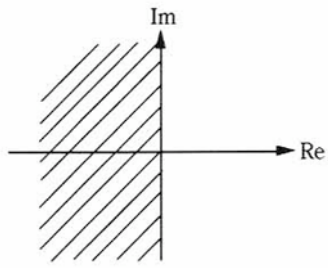


図3.9 連続時間システムの安定領域

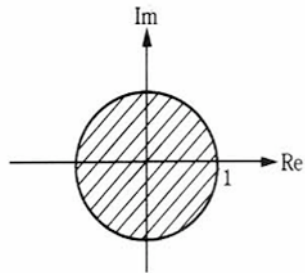


図3.10 離散時間システムの安定領域

#### 4. 3. 4 状態フィードバック

状態フィードバックという考え方は古典制御にはなかったもので、現代制御理論における特徴的な手法である。具体的には図3.11のように、状態変数を測定し、これに係数をかけて制御入力を作るというフィードバック制御の形となっている。

これに対し、古典理論では、図3.12のようにシステムの出力だけを観測し、これになんらかの演算を施して制御入力とするフィードバック制御を行ってきた。いったい何が違うのだろうか。

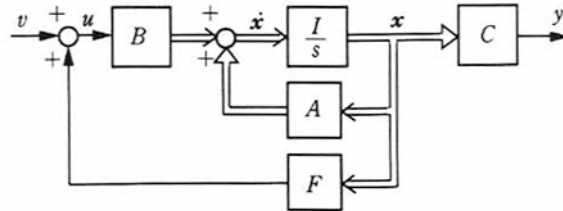


図3.11 状態フィードバック

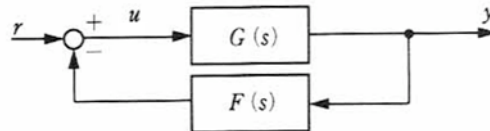


図3.12 出力フィードバック

##### (1) 状態フィードバック

状態フィードバックは、その名の通り「状態変数」をフィードバックする。まず、全部の状態変数が観測可能であるとして話を進めよう。

状態フィードバック

$$u = Fx + v \tag{3.80}$$

を施した新しいシステムの状態方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B(Fx + v) \\ &= (A+BF)x + Bv \\ &= \tilde{A}x + Bv \end{aligned} \tag{3.81}$$

となり、システム行列は、もとのAから、 $\tilde{A} = A+BF$ に変化する。

Fを調節することで、 $\tilde{A} = A+BF$ の固有値を操作できるかどうか重要である。一般に、システムが「可制御」であれば、FによってA+BFの固有値をまったく任意に指定できることが知られている。つまり、応答の遅いシステムを速応化したり、不安定なシステムを安定にしたりできるわけである。

このように、状態フィードバックはシステムの特性を、すっかり変えてしまうことができるという驚異的な特徴をもっている。ただし、現実には制御入力パワーの限界などがあるから、無制限に何でもできるというわけではない。

ここでは、状態フィードバック法として次の二つの手法を説明しよう。

- ・ 極配置法
- ・ 最適レギュレータ

## (2) 極配置法

簡単のために、1入力システム

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (3.82)$$

を考える。状態フィードバックは、

$$u = f^T x + v \quad (3.83)$$

となり、新しいシステムの状態方程式は、

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + b(f^T x + v) \\ &= (A + bf^T)x + bv \end{aligned} \quad (3.84)$$

となる。

まず、 $f$ によって $A + bf^T$ の固有値（システムの極）を任意に配置できることを示そう。

$x = Tz$ とし、 $T$ なる変換行列を介して $x$ を新しい状態変数 $z$ に変換すると、

$$\begin{aligned} T\dot{z} &= ATz + bu \\ \therefore \dot{z} &= T^{-1}ATz + T^{-1}bu \\ &= A'z + b'u \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_0 & \cdots & -a_{n-2} & -a_{n-1} \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \end{aligned} \quad (3.85)$$

なる可制御標準形に変換することができる。

状態フィードバックは、

$$\begin{aligned} u &= k^T z + v \\ &= (-k_0 \quad -k_1 \quad \cdots \quad -k_{n-1}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + v \\ &= -(k_0 z_1 + k_1 z_2 + \cdots + k_{n-1} z_n) + v \end{aligned} \quad (3.86)$$

となる。

新しいシステムの状態方程式は、

$$\dot{z} = (A' + b'k^T)z + b'v \quad (3.87)$$

となり、 $A' + b'k^T$ の固有値を任意に指定する $k$ を求める問題になる。

式(3.85)からわかるように、可制御標準形で書くと、 $b'$ は最下行だけが1であり他は全部0という非常に簡単な形であるから、式(3.87)の行列成分を書き下すと、



$$\dot{z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ -(a_0+k_0) & -(a_1+k_1) & \cdots & -(a_{n-2}+k_{n-2}) & -(a_{n-1}+k_{n-1}) \end{pmatrix} z + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} v \quad (3.88)$$

特性方程式は、

$$\lambda^n + (a_{n-1}+k_{n-1})\lambda^{n-1} + (a_{n-2}+k_{n-2})\lambda^{n-2} + \cdots + (a_1+k_1)\lambda + (a_0+k_0) = 0 \quad (3.89)$$

と表される。いま、指定したい極 ( $n$ 個) が、

$$\{ \lambda_1 \ \lambda_2 \ \cdots \ \lambda_{n-1} \ \lambda_n \} \quad (3.90)$$

であるとする。(普通は安定になるように選ぶだろう。)

このとき、特性方程式は、

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \cdots (\lambda - \lambda_n) = \lambda^n + \mu_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \mu_1\lambda + \mu_0 = 0 \quad (3.91)$$

となるであろう。すると、式(3.89)と式(3.91)の係数の比較により、

$$\begin{aligned} a_i + k_i &= \mu_i \\ \therefore k_i &= \mu_i - a_i \end{aligned} \quad (3.92)$$

となり、フィードバック行列  $k$  の成分を得る。

$k$  は変換した状態変数  $z$  に対するフィードバック行列であるから、もとの状態変数  $x$  に対するフィードバック行列になおす必要があり、

$$\begin{aligned} u &= k^T z + v \\ &= k^T T^{-1} x + v \\ &= f^T x + v \end{aligned} \quad (3.93)$$

ここに、

$$\begin{aligned} f^T &= k^T T^{-1} \\ \therefore f &= (k^T T^{-1})^T = (T^{-1})^T k \end{aligned} \quad (3.94)$$

となる。この  $f$  が状態フィードバックのフィードバック行列 (この場合はベクトル) である。

ひとつ例題を示そう。可制御標準形で与えられるシステム

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u \quad (3.95)$$

を考える。このシステムの根は、

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -2 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0 \quad (3.96)$$

を解いて、 $\lambda_1, \lambda_2 = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$  となるから、このシステムは不安定である。

いま、状態フィードバックを用いて根を $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$  としてシステムを安定化したい。状態フィードバックは、

$$u = (f_1 \ f_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.97)$$

であり、めざすシステムの特性方程式は、

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 \quad (3.98)$$

である。一方、状態フィードバックによる特性方程式は、

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 + f_1 & 3 + f_2 \end{pmatrix} \quad (3.99)$$

より、

$$|\lambda I - A'| = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -(2+f_1) & \lambda - (3+f_2) \end{vmatrix} = \lambda^2 - (3+f_2)\lambda - (2+f_1) \quad (3.100)$$

となるから、式(3.98)、(3.100)の係数を比較して、 $f_1 = -4, f_2 = -6$  となる。これが求める状態フィードバック行列の成分である。この係数が負であることは、負帰還 (negative feedback) がかかっていることを意味している。

#### 4. 3. 5 最適制御

最適制御は、現代制御理論の大きな成果であり、状態空間法と並んで現代制御理論の代名詞のように使われることもある。

##### (1) 最適制御の考え方

現代制御ではシステムの状態が変化することを状態空間内の移動であると考ええる。状態空間で、たとえば、点AからBへ移動するとするとその経路 (path) はさまざまである。そして、この移動経路は制御入力によっていろいろ変えることができる。たくさんの経路の中で、経路によって計算されるある評価関数が最小になるように制御することを「最適制御」とよぶ。

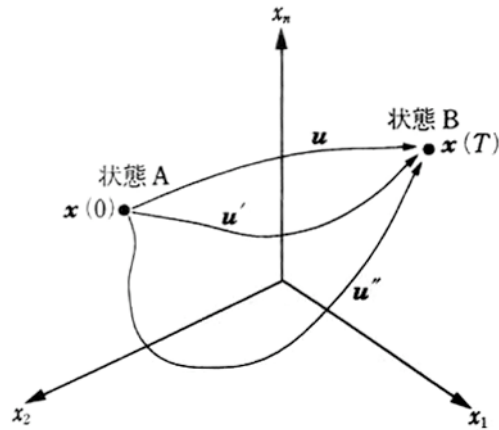


図3.13 状態空間内での移動

いま、一般の非線形システム

$$\dot{x} = f(x, u) \tag{3.101}$$

があり、評価関数

$$J = \int_0^T f_0(x, u) dt \rightarrow \min_u \tag{3.102}$$

を、 $u$ について最小化する（そのような $u$ を求める）ことを考えよう。なお、評価関数はスカラー量であることに気をつけてほしい。もうそうでなければ最適化は不可能である。

一般の非線形システムの場合は、この問題を解析的に解くことはできず、どうしても数値計算の助けが必要であるが、定常線形システムでは、Riccati形行列方程式を解くことによって解を求めることができる。

(2) 最適フィードバックと最適レギュレータ

線形システムの状態方程式は、

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{3.103}$$

$$y = Cx \tag{3.104}$$

ここで評価関数を

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \{x^T Qx + u^T R u\} dt \tag{3.105}$$

なる二次形式で定義する。

ここで、 $x(t)^T Qx(t)$ は $x$ の挙動に対するペナルティーであり、たとえば、

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & & & & \\ & q_2 & & & \\ & & q_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & 0 & & q_n \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

とすると,

$$\mathbf{x}(t)^T Q \mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n q_i x_i^2(t) \quad (3.107)$$

なるスカラー量である。これを  $t=0$  から  $\infty$  まで積分したものが評価関数に組み込まれる。むりやり図示すれば図 3.14 のようになる。斜線部の二乗値の積分は  $\mathbf{x}(t)$  の「0 からの振れに対するペナルティー」を表わし、 $q_i$  はその重み係数になっている。i 番目の状態変数があまり振れては困る場合は  $q_i$  を大きめに設定するわけである。

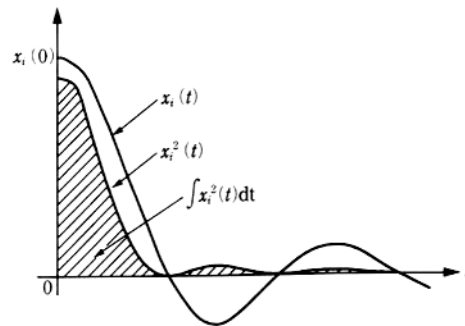


図3.14 2次形式評価関数の意味

同様に、 $R$  は入力エネルギーに対する重みを表わすことになる。従って、この評価関数は  $Q$  と  $R$  によって、制御成績と入力エネルギー間のバランスをとっていることになる。

さて、この問題の解は以下のように与えられる。まず、Riccati 形行列方程式

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (3.108)$$

を、たとえば「有本・Potter法」によって数值的に解き、得られた  $P$  を用いて、最適フィードバックが、

$$\mathbf{u} = -K\mathbf{x} + \mathbf{v} = -R^{-1}B^T P\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (3.109)$$

で与えられる。状態  $\mathbf{x}$  から入力  $\mathbf{u}$  を定める状態フィードバックの形になっている。 $\mathbf{v}$  は新しい制御入力である。こうしてできたシステムを最適レギュレータという。その状態方程式は、

$$\dot{\mathbf{x}} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}R^{-1}B^T P)\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{v} \quad (3.110)$$

で与えられる。このとき、評価関数の値は、

$$J_{min} = \mathbf{x}^T(0)P\mathbf{x}(0) \quad (3.111)$$

となる。最適レギュレータの構造を図示すれば、図3.15のようになる。

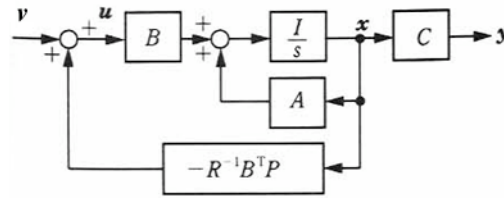


図3.15 最適レギュレータ

なお、古典的なPID制御は図3.16のようになるが、状態フィードバックは、何といても「状態変数を観測して」フィードバックをかけている、という点が大きく異なる。

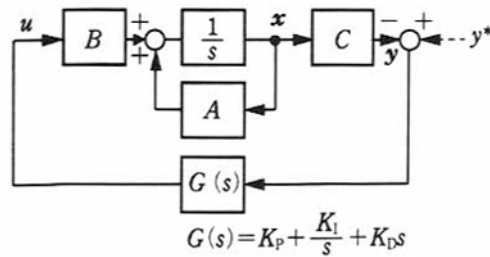


図3.16 古典的な制御器 (PID制御)

多少注意しておく必要がある。PID制御では、出力変数 $y$ とその指令値 $y^*$ との差に対して積分制御が効いているので定常偏差は生じないが、図3.15の最適レギュレータにはこのような性質は備わっていない。

最適制御の考え方をういながら、出力変数の定常誤差をとりたい場合には、図3.17のように、積分器を含んだサーボ補償器を設計する必要がある。このサーボ補償器と、状態フィードバック（安定化補償器と呼ばれる）を同時に設計する手法も明らかにされているが本書のレベルを越えるので割愛する。いずれにしても、図3.15の最適レギュレータと、図3.16のPID制御は、同じ土俵にのっていないので、単純な比較は禁物である。

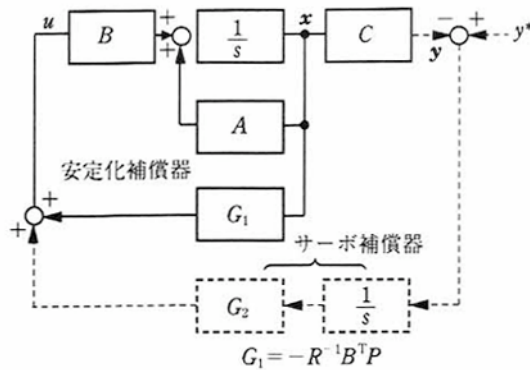


図3.17 最適追従サーボ系

(3) 最適レギュレータの性質

1 入出力形の場合を例にとって、最適レギュレータの性質を説明しよう。

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.112)$$

$$y = Cx \quad (3.113)$$

で与えられる線形システムにおいて、評価関数、

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \{y^T Q y + u^T R u\} dt = \frac{1}{2} \int_0^T \{x^T C^T Q C x + u^T R u\} dt \quad (3.114)$$

を最小にする状態フィードバックは、

$$u = -Kx + v = -R^{-1} B^T P x + v \quad (3.115)$$

であり、最適レギュレータは、

$$\dot{x} = (A - BK)x + Bv \quad (3.116)$$

となる。Pは、Riccati行列方程式、

$$PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + C^T Q C = 0 \quad (3.117)$$

の解である。

ここで、式(3.117)の両辺に、 $sP$ を足して引き、 $K=R^{-1}BP$ も用いて、

$$P(sI - A) - (sI + A^T)P + K^T R K = C^T Q C \quad (3.118)$$

左から  $-B^T(sI - A^T)^{-1}$ 、左から  $(sI - A^T)^{-1}B$  をかけ、両辺に  $R$  をかけると、

$$\{I + K(-sI - A)^{-1}B\}^T R \{I + K(sI - A)^{-1}B\} = R + B^T(-sI - A)^{-1} C^T Q C (sI - A)^{-1} B \quad (3.119)$$

となる。ここで、

- ・  $C(sI - A)^{-1}B$  はもとのシステム ( $G$ と書く) である。
- ・  $K(sI - A)^{-1}B$  は一巡ループ伝達関数 ( $L$ と書く) である。
- ・  $I + K(sI - A)^{-1}B$  は還送差と呼ばれる量で、 $D = I + L$  である。

を用いると、

$$D^T R D = R + G^T Q G \quad (3.120)$$

$s = j\omega$  とおいて、

$$D^T(j\omega) R D(j\omega) = R + G^T(j\omega) Q G(j\omega) \quad (3.121)$$

ここで、

$$G^T(j\omega) Q G(j\omega) \geq 0 \quad (3.122)$$

である (等号は  $Q=0$  のときのみ) から、

$$\{I + K(-j\omega I - A)^{-1}B\}^T R \{I + K(j\omega I - A)^{-1}B\} \geq R \quad (3.123)$$

となる。この式は、最適状態フィードバックを行ったとき、必ず満たされなければならない方程式である。

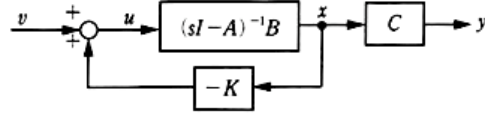


図3.18 最適レギュレータの表現

ここで、話を簡単にするために、1入出力システムで考えてみよう。

$$\dot{x} = Ax + bu \quad (3.124)$$

$$y = cx \quad (3.125)$$

において、評価関数、

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T \{x^T c^T c x + u^2\} dt \quad (3.126)$$

を最小にする状態フィードバックは、

$$u = -kx, \quad k = b^T P \quad (3.127)$$

であり、 $P$ は、

$$PA + A^T P - P b b^T P + c^T c = 0 \quad (3.128)$$

の解である。

先の議論に当てはめると、

$$D^T(j\omega) R D(j\omega) = R + G^T(j\omega) Q G(j\omega) \quad (3.129)$$

において、 $R=1, Q=1$  であり、 $G, D, L$  などもスカラであることを考慮して、

$$|D(j\omega)|^2 = 1 + |c(j\omega I - A)^{-1}b|^2 \quad (3.130)$$

を得る。これより、

$$\begin{aligned} |D(j\omega)|^2 &\geq 1 \\ \therefore |1 + L(j\omega)|^2 &\geq 1 \end{aligned} \quad (3.131)$$

となる。 $L = k(sI - A)^{-1}b$  は一巡ループ伝達関数であるから、複素平面におけるこの軌跡はナイキスト (Nyquist) 軌跡そのものである。式(3.131)は、最適レギュレータのナイキスト軌跡が、 $-1$ を中心とする円の中に入らないと言っていることになる。

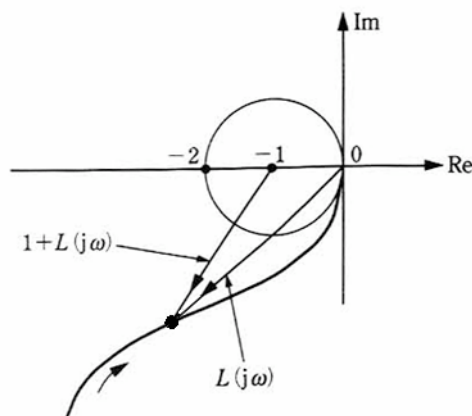


図3.19 最適レギュレータのナイキスト線図

これを円条件という。ナイキスト線図におけるゲイン余裕と位相余裕の定義（もともとの系が不安定，安定の2とおりに注意せよ）を思い出せば，最適レギュレータにおいては，ゲイン余裕は，

$$\frac{1}{2} \leq g_m \leq \infty \quad (3.132)$$

位相余裕は，

$$\theta_m \geq 60^\circ \quad (3.133)$$

という非常に優れた性質をもっていることがわかる。なお，デジタル系や，オブザーバを併用した系においては，等価的に円が小さくなり， $g_m$ や $\theta_m$ も小さくなることが知られている。

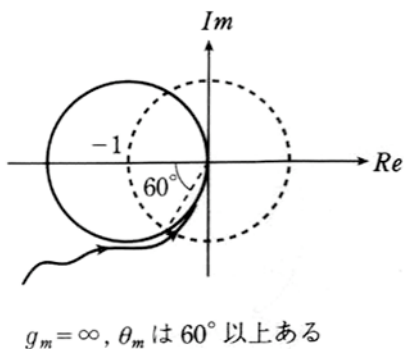


図3.20 最適レギュレータのナイキスト線図

#### 4. 3. 6 オブザーバ

前節では，状態変数 $x$ を観測してフィードバック制御に用いる「状態フィードバック」を考え，フィードバック行列は，極配置法や最適制御などで求めた。しかし，状態変数を完全に観測することは一般には困難であって，実際に観測できる変数，すなわち制御入力 $u$ と出力 $y$ から演算によって求める必要がある。このような演算を行うものを「オブザーバ (observer)」あるいは状態観測器という。

例を一つ示そう。誘導モータは，電気系4個（固定子電流および2次磁束の $d$ 軸 $q$ 軸成分），機械系1個（回転速度）を用いた5本の状態方程式で表現できるが，このうち電気系だけを取り出すと以下のようになっていて，回転速度の変化が電気系の変化に比べてあまり速くないと仮定すると（この仮定はほとんど正しい），線



形の状態方程式となる。行列A, Bの内容は省略。

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ \lambda_{dr} \\ \lambda_{qr} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} i_{ds} \\ i_{qs} \\ \lambda_{dr} \\ \lambda_{qr} \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} v_{ds} \\ v_{qs} \end{pmatrix} \quad (3.134)$$

誘導モータを高性能制御するには、2次磁束 $\lambda_r = (\lambda_{dr} \ \lambda_{qr})^T$ の情報を用いる必要がある。しかし、2次磁束はモータ内部の現象であるから直接観測することはできない。そこで、観測できる量である、固定子電圧  $v_s = (v_{ds} \ v_{dr})^T$  と電流  $i_s = (i_{ds} \ i_{dr})^T$  とから推定する必要がある。

ここで注意すべきことは、2次磁束 $\lambda_r = (\lambda_{dr} \ \lambda_{qr})^T$ は、測定可能ではないが「可観測」であるということである。オブザーバが構成できるためには、可観測性が成り立っている必要がある。

### (1) 同次元オブザーバ

まず、図3.21のように、対象の状態方程式を用いたシステムのモデルを計算機の中に用意して、同じ入力を入れてみよう。これをシミュレータという。シミュレータの出力 $\hat{y}$ を得るが、 $\hat{y}$ と $y$ は様々な誤差や歪みのため、完全には一致しないだろう。とくにシステムが積分を含んでいたり、もともとと不安定な場合は、 $\hat{y}$ はたちまち発散してしまうから使いものにならない。

そこで、 $\hat{y}$ と $y$ の誤差をあるゲイン（オブザーバゲインという）をかけてシミュレータの方へフィードバックしたのが、図3.22である。ゲインをうまく設計してやると、誤差はゼロに収束し、状態変数の推定値 $\hat{x}$ を状態フィードバックに用いてやることができるようになる。この構成を「同次元オブザーバ」という。

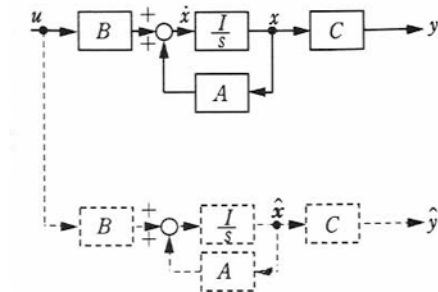


図3.21 対象システムとシミュレータ

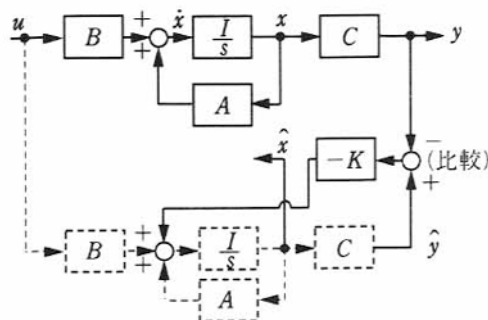


図3.22 同次元オブザーバの構成

さて、対象システムの状態方程式は、

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.135)$$

$$y = Cx \quad (3.136)$$

であり、図3.22のオブザーバの方程式は、

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - \hat{y}) \quad (3.137)$$

$$\hat{y} = C\hat{x} \quad (3.138)$$

である。辺々引き算すると、

$$\begin{aligned} (\dot{\hat{x}} - \dot{x}) &= A(\hat{x} - x) - K(Cx - C\hat{x}) \\ &= (A - KC)(\hat{x} - x) \end{aligned} \quad (3.139)$$

$$\therefore \dot{e} = (A - KC)e \quad (3.140)$$

ただし、 $e = \hat{x} - x$  である。式(3.140)より、 $K$ によって $A - KC$ の固有値を指定することにより、推定誤差を任意の特性で収束させることがわかる。これは制御における極配置の考え方とよく似ている。

## (2) 最小次元オブザーバ

状態 $x$ のうち一部が測定できるケースもよくあり、このときは以下の「最小次元オブザーバ」を用いる方が、計算量などの観点からも得策である。いま、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} u \quad (3.141)$$

$$y = x_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad (3.142)$$

という状態方程式表現された系において、 $x_1$ が測定可能、 $x_2$ が測定不可能なのでオブザーバを用いて推定する、とする。もちろん、全体を同次元オブザーバで指定してもよいが、それではオブザーバの次元が大きくなってしまふ。測定できる変数が $n_1$ 個、できない変数が $n_2$ 個なら、最小次元オブザーバの次元は $n_2$ でよい。先にあげた、誘導モータの2次磁束オブザーバはこの好例であり、 $x_1$ が測定可能な固定し電流 $i_s = (i_{ds} \ i_{qr})^T$ 、 $x_2$ が測定不可能な2次磁束 $\lambda_r = (\lambda_{dr} \ \lambda_{qr})^T$ となっている。

最小次元オブザーバの構成法として、ここではゴピナス (Gopinath) の方法を説明する。オブザーバの方程式は、

$$\dot{\hat{x}}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}\hat{x}_2 + B_2u + K(\hat{x}_1 - x_1) \quad (3.143)$$

である。この式によって $\hat{x}_2$ が時々刻々出力される。式(3.143)の中で、 $x_1$ や $\hat{x}_1$ はとりあえず測定できるが、 $\hat{x}_1$ は推定されるはずの $\hat{x}_2$ を用い、次式によって再構成する。

$$\hat{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}\hat{x}_2 + B_1u \quad (3.144)$$

式(3.143)を見ると、オブザーバはシミュレータ (simulator)  $\hat{\dot{x}}_2 = A_{21}x_1 + A_{22}\hat{x}_2 + B_2u$  と、予測誤差修正フィードバック (prediction error correction feedback)  $K(\hat{x}_1 - x_1)$  とからなっている、これは一般的にいえることである。

式(3.143)からもとの状態方程式の下半分を辺々引くことにより、オブザーバの推定誤差、

$$e = \hat{x}_2 - x_2 \quad (3.145)$$

の特性は、

$$\dot{e} = (A_{22} - KA_{21})e \quad (3.146)$$

で与えられる。 $K$ を調整してオブザーバの極を指定することになる。

なお、この形のオブザーバでは、状態の微分 $\dot{x}_1$ が出てきているので、実際にこれを計算することはできない。そこで、

$$\hat{x}_2 = \xi + Ky \quad (3.147)$$

とにおいて、 $x$ に関する状態方程式を作れば $\dot{x}_1$ を消去することができる。(式(3.147)を式(3.143)に代入すれば簡単に求められる。各自やってみよ。)

### (3) 定常カルマンフィルタ

カルマンフィルタは、雑音に埋もれた信号の中から目的の信号だけを取り出すフィルタで、雑音の特性がわかっているとき一種の最適なフィルタとなる。宇宙工学の分野ではよく使われている。

システムに加わる雑音には、システムノイズと観測ノイズがあり、以下の $v$ および $w$ で表わしている。

$$\dot{x} = Ax + Bu + v \quad (3.148)$$

$$y = Cx + w \quad (3.149)$$

このシステムに対して同一次元オブザーバを構成して、状態変数 $x$ を推定しよう。オブザーバの方程式は、

$$\begin{aligned} \hat{\dot{x}} &= A\hat{x} + Bu - K(\hat{y} - y) \\ &= (A - KC)\hat{x} + Ky + Bu \end{aligned} \quad (3.150)$$

である。ここで、推定誤差 $e = \hat{x} - x$ の2乗期待値 $J = E[e^T e]$ を最小とするように $K$ を定める。

ノイズの自己相関関数 (共分散行列) を、

$$E[v(t)v(t)^T] = Q\delta(t-t) \quad (3.151)$$

$$E[w(t)w(t)^T] = R\delta(t-t) \quad (3.152)$$

とする。また、 $E[v(t)w(t)^T] = 0$ であるとする。つまり、システム雑音と測定雑音は大きさ $Q$ 、 $R$ の白色雑音であり、互いには相関はないとしている。このとき、最適オブザーバゲインは、

$$K_{opt} = PC^T R^{-1} \quad (3.153)$$

で与えられることが知られている。ただし、 $P$ は、

$$PA^T + AP - PC^T R^{-1} CP + Q = 0 \quad (3.154)$$

なるRiccati行列方程式の解として与えられる。オブザーバの極は、 $A - K_{opt}C$ の固有値であり、このとき誤差の2乗期待値は最小値  $J_{min} = \text{trace } P$ をとる。

以上をまとめると、制御と推定に関して、以下のような双対関係 (duality) があることがわかる。

|          | 制 御       | 観 測         |
|----------|-----------|-------------|
| 直接極配置をする | 状態フィードバック | 状態変数オブザーバ   |
| 最適性を追求   | 最適レギュレータ  | 定常カルマン・フィルタ |

最適レギュレータをよく知っている場合、オブザーバのときと同じようにして定常カルマンフィルタを設計することも可能である。すなわち、式(3.148)、(3.149)が与えられるとき、行列 $A$ と $C$ を用いて、

$$\dot{\hat{x}} = A^T \hat{x} + C^T u \quad (3.155)$$

なる仮想的なシステムをつくり、ノイズの共分散行列を表した $Q, R$ を用いて、

$$J' = \frac{1}{2} \int_0^T \{ \hat{x}^T Q \hat{x} + u^T R u \} dt \quad (3.156)$$

という評価関数を最小とする最適フィードバック行列 $F_o$ を求めれば、最適オブザーバゲイン (カルマンゲイン) は、 $K_o = F_o^T$ で与えられる。

このようなことから、カルマンフィルタは最適オブザーバであるといってよい。なお「最適」といっても、 $Q, R$ を定められればその $Q, R$ に対して最適な設計ができるという意味であって、 $Q, R$ をどのように決めるかという点については何も言っていないことには注意する必要がある。

## 4. 4 ロバスト制御

### 4. 4. 1 適応制御とロバスト制御

1960年頃から始まった現代制御理論の一連の手法は、制御対象のモデルが正確に得られるとして開発されてきた。しかし現実には制御対象のモデルは大きな誤差を含むことが多く、このため、理論と現場は大きく乖離し、制御理論は机上の空論であって、実際には使われないという時代が続いた。

やがて人々は、実用的な制御系を設計するときには、制御対象のあいまいさ、すなわちモデル化誤差に積極的に対処していく必要があることにあらためて気づき、適応制御とロバスト制御という二つの異なる手法が開発された。この二つを表にして比べてみよう。

適応（あるいは学習）制御もロバスト制御も、ともにマイコンやDSPのような高速演算プロセッサの恩恵を受けるが、適応・学習制御がかなり複雑な演算を低速で行うのに対し、ロバスト制御は簡単な演算を高速で繰り返す点に違いがある。歴史的には適応制御が古く、ロバスト制御は1980年頃からとくに注目されるようになったものである。

表4.1 適応・学習とロバストの比較

|           | 適応・学習                                | ロバスト               |
|-----------|--------------------------------------|--------------------|
| あいまいさへの対処 | 許さない                                 | 許す                 |
| 方 策       | (あいまいさを同定)<br>何回かやっていると<br>だんだんうまくなる | (あいまいさに鈍感)<br>一発勝負 |
| コントローラ    | 可 変                                  | 固 定                |
| 応 答       | 遅 い                                  | 速 い                |
| アルゴリズム    | 複 雑                                  | 簡 単                |
| サンプリング周期  | 長くてよい                                | 十分短いことが必要          |

適応制御は、制御対象の動特性の変化に対して制御器を適応的に変化させ、常に最適な状態で制御を行っていかうとする制御手法である。生物が環境の変化にあわせて自己を変えながら対応していく機能を適応と呼ぶことから、この名前がついている。

たとえば、航空機の機体特性は高度によって著しく変化する。原子炉、化学プラントなどでも動作点が変わると、その特性は大きく変化するから、制御器の設計に用いるモデルも変えなければいい制御器は得られない。もちろんフィードバック制御は、このような制御対象のモデル変化に対してもともと強いはずである。従って、ことさら適応制御という場合は、固定のフィードバック制御器では扱えないような大きな特性変化を相手にしているといえる。

適応制御には、大きく分けて、STR（セルフチューニングレギュレータ）とMRACS（モデル規範形適応制御）の二つがあり、それぞれ、図4.1および図4.2のような構成となっている。適応制御の理論は膨大であり本書の範囲を越えるので、ここではひとまず筆を置くことにする。

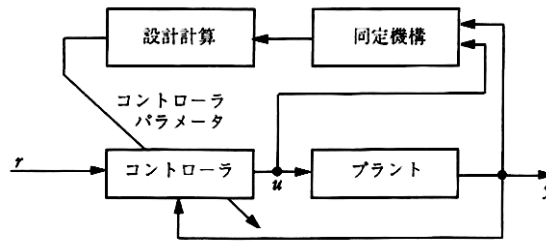


図4.1 STR (セルフチューニングレギュレータ)

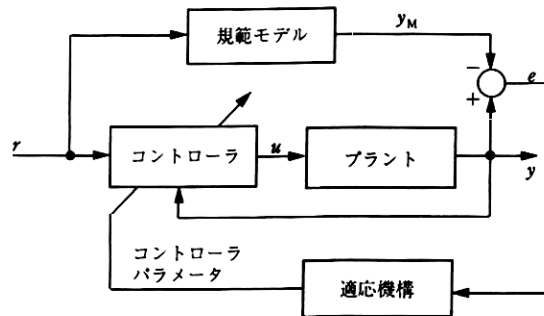


図4.2 MRACS (モデル規範形適応制御)

#### 4. 4. 2 H $\infty$ 制御の考え方

制御対象のあいまいさに対処するもう一つの手法であるロバスト制御は、ここ数十年に大きく進歩した。その代名詞のように扱われているH $\infty$ 最適制御について説明しておこう。

##### (1) ロバスト制御の背景

1930~1950年頃を中心とする、いわゆる古典制御理論の時代には、周波数応答を調べることによって制御系を設計した。ブロック線図を用いてシステムの構造を表現し、周波数特性を描いた、ボーデ (Bode) , ナイキスト (Nyquist) , ニコルズ (Nichols) など開発者の名前の付いた図面が用いられた。これらは周波数領域での図式的設計手法であり、設計者によって特徴のある制御器が設計された。また、単変数 (1 入力 1 出力) システムを相手にした設計法であった。

1960年代になると、現代制御理論と呼ばれるものが登場した。その特徴は、システムを状態方程式と呼ばれる 1 階の連立微分方程式で記述することであり、時間領域で理論は展開された。また、多入力多出力システムを最初から相手にした。図形はあまり用いず、数式を用いた代数的手法が主に用いられた。そこには、これからの科学技術が急速に進歩する世の中では、古典制御のようないいかげんな設計法は対処できない、という雰囲気があったといわれている。ちょうどマイクロプロセッサが大きく発展し、複雑な制御アルゴリズムでも実装可能になったことも幸いして、多くの研究が行われた。

しかし、制御対象の正確なモデルを前提に理論が組み立てられているため、モデル誤差があると制御性能が著しく低下することも珍しくなく、状態方程式は次数を決めなければ始まらないことから、高次項をモデル誤差として含むことの多い現実のプラントや、分布定数系には適用しにくいことも指摘されてきた。

現代制御理論は大学での研究テーマには適していても現実に使われることは少なく、いわゆる理論と現実の乖離という言い方がされ深刻な問題となった。この状況を打破するために、学界、産業界双方からの歩みよりの努力がなされた、1980年代から流行しはじめたロバスト制御の開発によって、こんにちでは好転してきて

いると言ってよいであろう。

多くの方は、周波数領域における特性や基準になじみがある。たとえば、ゲイン余裕 $g_m$ 、位相余裕 $\theta_m$ 、一巡伝達関数のピーク値 $M_p$ などの方が、時間領域における指標、たとえば、最適制御における2次形式評価関数より直観的に理解しやすい。

こういう動機にそったものとして、ローゼンブロック (Rosenbrock) , ポロビッチ (Wolovich) などによる多項式行列分解表現による制御系設計 (1970年~) , さらに、ユーラ (Youla) パラメトリゼーションを一つの核とする安定有理関数環上の制御系設計法 (1980年~) が提案された。H $\infty$ 制御はこの延長線上にある。

H $\infty$ 制御は、1981年、ゼイムス (Zames) によって、IEEE Transactions on Automatic Control誌上に発表された感度関数最適化、さらに、1981年、ドイル (Doyle) によるループ整形という考え方の提示がその発端である。初期には、H $\infty$ 制御問題はH2最適制御 (普通の最適制御を、評価関数が2乗ノルムの最小化であるためこう呼ぶ。) とは全く異なる難しいものであるという認識が強かった。

問題は定式化されたものの解法は見つかっておらず、誰が最初に完全な解法を与えるか競争になった。やがて1988年頃からアルゴリズムが簡略化されるようになり、その成果は有名なGDKF論文 (1989に発表され著者の頭文字をとってこう呼ばれる) にまとめられている。ときをおかず、MATLABなどのCADが普及したおかげで、いまではH $\infty$ 制御問題の数値解を求めることは難しいことではなくなった。

## (2) H $\infty$ ノルム

H $\infty$ 制御では、制御性能やロバスト性などの評価に、伝達関数行列のH $\infty$ ノルムを用いる。H $\infty$ ノルムは、成分が関数からなる行列の一種の大きさである。

$G(s)$ がスカラーの場合、すなわち、単なる伝達関数の場合は、

$$\|G(s)\|_{\infty} = \max_{\omega} |G(j\omega)| \quad (4.1)$$

で与えられる。これは、周波数特性のピーク値であって、ベクトル軌跡で描けば、図4.3に示すとおりである。

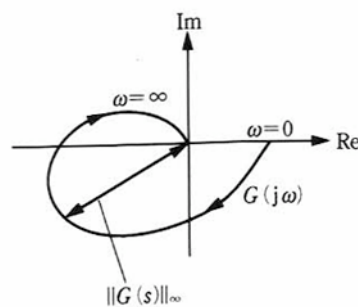


図4.3  $G(s)$ がスカラーの場合の  $\|G(s)\|_{\infty}$ の挙動

多変数の場合、すなわち、伝達関数行列の場合は、

$$\begin{aligned} \|G(s)\|_{\infty} &= \max_{\omega} \left[ \lambda_{\max} \{ G^T(-j\omega)G(j\omega) \} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \max_{\omega} \bar{\sigma} \{ G(j\omega) \} \end{aligned} \quad (4.2)$$

で与えられる。ここに、 $\lambda_{max}$ は最大固有値であり、 $\bar{\sigma}$ を最大特異値とよぶ。

$H^\infty$ ノルムと $H^2$ ノルムの間には、以下のような重要な性質がある。

$$\|G(s)\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{tr} \{ G^T(-j\omega)G(j\omega) \} d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4.3)$$

これはまた $G(s)$ のパワースペクトルでもある。さらに、

$$\|G(s)\|_\infty = \max \{ \|G(s)x(s)\|_2 / \|x(s)\|_2 \} \quad (4.4)$$

と表現することもできる。つまり、 $G(s)$ の $H^\infty$ ノルムとは、考えられる全ての入力 $x(s)$ のうち、出力 $G(s)x(s)$ を一番大きくする場合の、出力と入力の比である。この意味で、 $H^\infty$ ノルムは最悪ケースの評価であるという言い方をすることもある。

### (3) $H^\infty$ 制御で扱う諸種の問題

#### ・感度低減問題

フィードバック制御の最大の目的は、系のパラメータ変動の対して出力があまり変化しないことである。これを $H^\infty$ ノルム最小化という表現で書いてみよう。

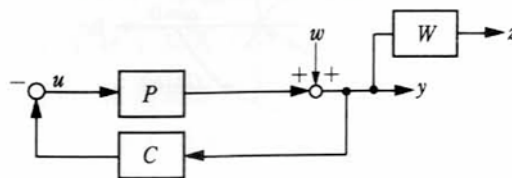


図4.4 感度低減問題

感度低減とは、図4.4において、外乱 $w$ から出力 $y$ までの振幅を小さくすることである。外乱 $w$ には制御対象 $P$ のパラメータ変動も含んでいると考えてもよく、そうすればパラメータ変動と外乱の抑圧とは同義であるといえる。

外乱 $w$ から出力 $y$ までの伝達関数は、感度関数と呼ばれ、 $S(s)$ と表記する。すなわち、

$$S(s) = \frac{y(s)}{w(s)} = \frac{1}{1+C(s)P(s)} \quad (4.5)$$

である。

これを小さくすることになるが、ただ小さくするだけなら $C(s)$ に非常に大きなゲインの制御器を持ってくればよく、問題としての意味をなさない。出力 $y$ の高周波成分は重要でないから、低周波領域の重みを大きくするために、重み関数 $W(s)$ を通して $z$ という仮想的な出力を作り、 $w$ から $z$ までの伝達関数の大きさを小さくすることを考える。そして、この大きさとして無限大ノルムを用いるのである。これを、

$$\|W(s)S(s)\|_\infty < \gamma \quad (4.6)$$



と書き、 $\gamma$ をできるだけ小さくするような制御器 $C(s)$ を求めることになる。こうして、感度低減問題は、現実  
に意味がある問題となる。注意すべきことは、 $W(s)S(s)$ が、 $w$ から $z$ までの伝達関数に対応しているとい  
うことである。

・ロバスト安定化問題

今度は制御対象の変動をきちんと表現してみよう。図4.5において、 $\Delta$ が制御対象の変動を表している。すな  
わち、変動のない制御対象（これをノミナルプラントという）の伝達関数を $P(s)$ とすると、変動したプラント  
は、 $P(s)(1+\Delta)$ となる。

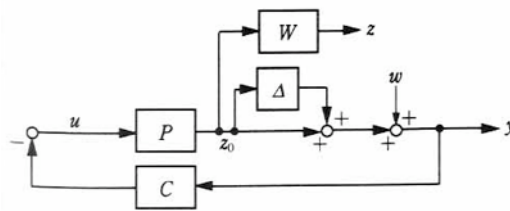


図4.5 ロバスト安定化問題

いま変動がないとき制御系全体は安定であるとする。プラント変動 $\Delta$ があると、一巡伝達関数は、

$$\begin{aligned} C(s)P(s) &\rightarrow C(s)P(s)(1+\Delta) \\ &= C(s)P(s) + \Delta C(s)P(s) \end{aligned} \tag{4.7}$$

と変化する。この新しい系がなお安定であるためには、必要な条件を求めてみよう。

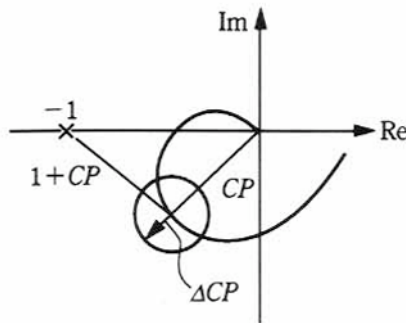


図4.6 ロバスト安定であるための条件

ここで、ナイキスト (Nyquist) の安定条件を思い出せば、 $\Delta$ というプラント変動があっても太くなったナイキ  
スト軌跡が、なお $(-1,0)$ の点を含まなければよいことが、安定の十分条件であることはすぐにわかる。すな  
わち、図4.6から、

$$\begin{aligned} |\Delta C(s)P(s)| &< |1+C(s)P(s)| \\ \therefore \left| \Delta \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} \right| &< 1 \end{aligned} \tag{4.8}$$

であればよい。ここで、

$$T(s) = \frac{C(s)P(s)}{1+C(s)P(s)} \quad (4.9)$$

は、相補感度関数と呼ばれるもので、これを用いると、式(4.8)は、

$$|\Delta \cdot T(s)| < 1 \quad (4.10)$$

となる。

次にプラント変動を覆うような、なるべく簡単な関数  $W(s)$  を用いて、 $\Delta$  の大きめの見積もりを与える。すなわち、

$$|\Delta| < |W(s)| \quad (4.11)$$

とし、伝達関数の大きさの定義に無限大ノルムを用いると、ロバスト安定条件は、

$$\|W(s)T(s)\|_{\infty} < 1 \quad (4.12)$$

となる。この場合、プラント変動は高周波領域で大きくなることが多いから、 $W(s)$  は高周波領域で大きな値をとる伝達関数にするのが自然であろう。

ここでもやはり注意すべきことは、 $W(s)T(s)$  は、図4.5において、信号  $w$  から  $z$  (ノミナルプラント  $P$  の出口  $z_0$  に重み  $W(s)$  をかけたもの) までの伝達関数になっているということである。 $H^{\infty}$  制御では、このように、ノルムを小さくしたい伝達関数が、必ずある  $w$  からある  $z$  までの伝達関数となるように、 $w$  と  $z$  の組みを見つつけたり、あるいはうまく作ったりしなければならない。

#### ・混合感度最適化問題

$S(s)$  を小さくしたいという感度低減と、 $T(s)$  を小さくしたいというロバスト安定化は、ともにきわめて重要なフィードバック制御系の基本特性であるが、この二つの要求はしばしば矛盾する。なぜなら、

$$S(s) + T(s) = 1 \quad (4.13)$$

であるから、片方を小さくしようとする、もう片方は必ず大きくなってしまいうためである。

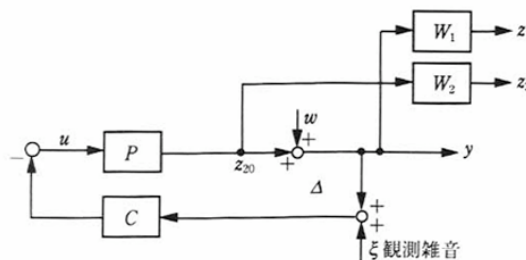


図4.7 混合感度最適化問題

図4.7において、感度関数と補感度関数は、

$$S(s) = \frac{y}{w} = \frac{1}{1+CP} \quad (4.14)$$

$$T(s) = \frac{z_2}{w} = \frac{CP}{1+CP} \quad (4.15)$$

で与えられる。

感度関数は、式(4.14)からも明らかなように、外乱抑圧特性の指標である。これは低い周波数領域で小さくなってほしいから、低周波で大きくなるような重み  $W_1(s)$  をかけて、 $w$  から  $z_1$  までの伝達関数として評価する。

一方、補感度関数の意味するところはパラメータ変動に対するロバスト安定性であり、 $CP/(1+CP)$  がそれに相当する。これは、図4.7の  $w$  から  $z_2$  までの伝達関数になる。 $CP/(1+CP)$  はまた、観測ノイズ  $x$  から出力  $y$  までの伝達関数でもあるから、補感度関数はノイズ応答特性でもある。すなわち、

$$T(s) = \frac{CP}{1+CP} = \frac{y}{x} \quad (4.16)$$

ロバスト安定性やノイズ応答特性は、高い周波数領域で問題になる特性である。従って通常、高周波領域で大きくなるような重み  $W_2(s)$  をかけて、 $w$  から  $z_2$  までの伝達関数として評価する。

このように、それぞれ評価したい（周波数特性を整形したい）伝達関数が、ある仮想的な入力からある仮想的な出力への伝達関数として定義されることがわかる。

以上をまとめると、混合感度問題は、

$$\left\| \begin{array}{c} W_1(s)S(s) \\ W_2(s)T(s) \end{array} \right\|_{\infty} < \gamma \quad (4.17)$$

とする、制御器  $C(s)$  を求めることである。

#### (4) $H_{\infty}$ 制御の定式化と一般化プラント

以上のことから、 $H_{\infty}$ 制御問題では、一般化プラントと呼ぶ、制御対象と重み関数を一緒にしたものを考え、制御器は一般化プラントから  $y$  をもらって  $u$  を返すという働きをするものという構造にまとめられることがわかる。（図4.8）

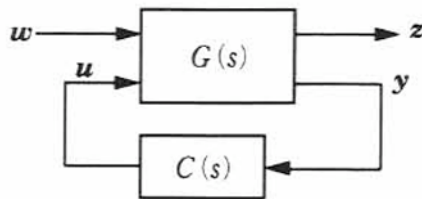


図4.8 一般化プラント  $G(s)$  と制御器  $C(s)$

一般化プラントの入出力特性は、

$$\begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

ただし、

$w$  : 外部入力（外乱，基準入力）

$u$  : 制御入力（実際に操作できる入力量）

$z$  : 誤差 (これが制御量, すなわち評価したい量)  
 $y$  : 観測出力 (実際に制御器に読み込める量)

と呼ぶ。これはいままで用いてきたモデル化とはかなり異なる。しかし, 制御器の設計までも含めた非常に論理的な選び方であり, これからはこのような考え方が普通になるものと思われる。

さて, 制御器の動作は,

$$u = C(s) y \quad (4.19)$$

であるから, 一般化プラントと組み合わせると,  $w$ から $z$ までの伝達関数は,

$$G_{wz} = G_{11} + G_{12}C(I - G_{22}C)^{-1}G_{21} \quad (4.20)$$

となる。

$H^\infty$ 制御とは, この,  $G_{wz}(s)$ の無限大ノルムを最小にするような制御器 $C(s)$ を求める問題である。すなわち,

$$\|G_{wz}(s)\|_\infty \rightarrow \min_{C(s)} \quad (4.21)$$

という形に定式化することができる。

#### 4. 4. 3 $H^\infty$ 最適制御問題の解とその意味

先にも述べたように,  $H^\infty$ 最適制御問題を解いた最初の手法は, GDKFの論文に述べられているものである。こんにちでは, GDKF論文で仮定されているいろいろな条件もほとんど取り除かれ, 使いやすいCADが登場するに至って,  $H^\infty$ 制御器を求めること自体に問題はなくなっている。

ここでは, 簡単な場合について解を示し,  $H^2$ 最適制御問題の解との関係などを中心に説明する。

##### (1) $H^\infty$ 最適制御問題の解

まず, 一般化プラントの状態方程式表現を,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_1w + B_2u \\ z &= C_1x + D_{12}u \\ y &= C_2x + D_{21}w \end{aligned} \quad (4.22)$$

とする。ただし, 簡単のために, 以下の仮定を設けておく。

$$C_1^T D_{12} = 0 \quad (4.23)$$

$$C_2^T D_{21} = 0 \quad (4.24)$$

$$D_{12}^T D_{12} = I \quad (4.25)$$

$$D_{21}^T D_{21} = I \quad (4.26)$$

さて, 適当にもうけた $\gamma$ について,

$$\|G_{wz}(s)\|_\infty < \gamma \quad (4.27)$$

とする $H^\infty$ 制御器は以下で与えられる。

・レギュレータ (H $\infty$ )

制御に相当する部分 (レギュレータと呼ぶ) は, 状態フィードバックの形で,

$$u = F_\infty x \quad (4.28)$$

で与えられる。ただし,

$$F_\infty = -B_2^T X_\infty \quad (4.29)$$

$X_\infty$  は,

$$A^T X_\infty + X_\infty A + C_1^T C_1 - X_\infty B_2 B_2^T X_\infty + \gamma^{-2} X_\infty B_1 B_1^T X_\infty = 0 \quad (4.30)$$

なるリッカチ (Riccati) 方程式の解である。

・オブザーバ (H $\infty$ )

上記の状態フィードバックは状態変数を用いているが, これは実際には測定できないので, オブザーバが必要となる。その状態方程式は,

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + L_\infty (C_2 \hat{x} - y) \quad (4.31)$$

で与えられ,

$$L_\infty = -Y_\infty C_2^T \quad (4.32)$$

である。 $Y_\infty$  は,

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T + B_1 B_1^T - Y_\infty C_2^T C_2 Y_\infty + \gamma^{-2} Y_\infty C_1^T C_1 Y_\infty = 0 \quad (4.33)$$

なるRiccati方程式の解で与えられる。

・両者まとめて, H $\infty$ 制御器は,

$$\dot{\hat{x}} = (A + B_2 F_\infty + Z_\infty L_\infty C_2 + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty) \hat{x} - Z_\infty L_\infty y \quad (4.34)$$

$$u = F_\infty \hat{x} \quad (4.35)$$

ただし,

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1} \quad (4.36)$$

となる。これで,  $y$ を読み込んで $u$ を出力するという出力フィードバックの形となっている。

具体的には, ある $\gamma$ を仮定して2本のRiccati方程式を解き, 解がもたれば $\gamma$ をさらに小さくしていく。二分法などを使って $\gamma$ を最小に追い込んでいけばよい。しかし,  $\gamma$ の最小値がいくらになるかはわかっていないので, 収束計算が必要となる。これを $\gamma$ -iterationとよんでいる。

(2) H $_2$ 制御問題の解との関係

比較のために, H $_2$ 最適制御の解を, H $\infty$ 最適制御で用いた式(4.22)の枠組の中で記述してみよう。

・レギュレータ (H $_2$ )

H $_2$ 最適制御の場合は, 評価関数が当然異なってくる。いま,  $\|z\|_2^2$  という二乗ノルムで与えられる量を

考えてみると、式(4.12)から、

$$\begin{aligned} \|z\|_2^2 &= \|C_1x + D_{12}u\|_2^2 = \|C_1x\|_2^2 + \|u\|_2^2 \\ &= \int_0^\infty \{x^T C_1^T C_1 x + u^T u\} dt \end{aligned} \quad (4.37)$$

となる。途中で、式(4.23-4.26)の仮定を使っている。この評価関数の形はすでになじみのある形である。そして、その解が、

$$u = F_2 x \quad (4.38)$$

で与えられることも既に知っている。ただし、

$$F_2 = -B_2^T X_2 \quad (4.39)$$

で、 $X_2$  は、

$$A^T X_2 + X_2 A + C_1^T C_1 - X_2 B_2 B_2^T X_2 = 0 \quad (4.40)$$

なるRiccati方程式の解である。

#### ・オブザーバ (H2)

レギュレータに用いた状態変数は実際は測定できないのであるから、これを推定するオブザーバとして、カルマンフィルタを用いよう。 $w$ を白色ノイズと解釈すれば、 $B_1$ をシステムノイズ、 $D_{21}$ を観測ノイズの共分散行列とした場合のカルマンフィルタは、

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + L_2 (C_2 \hat{x} - y) \quad (4.41)$$

ただし、

$$L_2 = -Y_2 C_2^T \quad (4.42)$$

で、 $Y_2$ は、

$$A Y_2 + Y_2 A^T + B_1 B_1^T - Y_2 C_2^T C_2 Y_2 = 0 \quad (4.43)$$

なるRiccati方程式の解として与えられる。

#### ・両者まとめて、H2最適制御問題の解は、

$$\dot{\hat{x}} = (A + B_2 F_2 + L_2 C_2) \hat{x} - L_2 y \quad (4.44)$$

$$u = F_2 \hat{x} \quad (4.45)$$

という制御器として与えられる。

さて、この両者を比べてみると、いくつか興味深いことがわかる。

- (1) H2最適制御においては、制御のための最適レギュレータ、観測のためのカルマンフィルタにおいて、二つのRiccati方程式をとりて解を求めることができた。この2本のRiccati方

程式を解くという基本構造は、 $H^\infty$ 最適制御においても全く同一である。

- (2) しかし、 $H^2$ 最適制御の2本のRiccati方程式は全く独立であるのに対し、 $H^\infty$ 最適制御の2本のRiccati方程式は独立ではない。すなわち、制御と観測の分離定理が成立していないので、 $\gamma$ -iterationが必要となるなど設計が難しくなっている。
- (3)  $H^\infty$ 最適制御において形式的に $\gamma \rightarrow \infty$ とすると、 $H^\infty$ 最適制御は $H^2$ 最適制御になる。その意味で $H^\infty$ 最適制御は $H^2$ 最適制御を特別な場合として含んでいる。

$H^\infty$ 最適制御の目的は周波数領域の指標の最適化であり、しかも $H^\infty$ ノルムという奇妙なものをを用いた $H^2$ 最適制御とは似ても似つかないものであったが、結果的には両者には密接な関係があることがわかって決着したのである。

#### 4. 4. 4 $\mu$ シンセシスとロバスト性能

$\mu$ 解析や $\mu$ シンセシスの全容を詳細に述べることは本書の範囲を越えるので、ここでは $\mu$ シンセシスの中に出てくる、ロバスト性能という考え方を紹介する。

$H^\infty$ 最適制御の混合感度最適化問題においては、感度関数と補感度関数を用いて、  
制御性能の評価

$$\|W_1 S\|_\infty < 1 \quad (4.46)$$

ロバスト安定性の評価

$$\|W_2 T\|_\infty < 1 \quad (4.47)$$

という二つの要求を満たすように制御器を設計した。

ところが、いま一度考え直してみると、式(4.46)の性能評価は、プラント変動がない場合について行われているわけであり、実際には、プラント変動がある場合についても、外乱抑圧性能や、パラメータ変動に対するロバスト性を保証しなければならないであろう。これを、ロバスト性能条件という。

いまプラントが、

$$P \rightarrow P(1 + \Delta W_2) \quad (4.48)$$

と変動したとする。ここで、 $\Delta$ は、振幅 $|\Delta| \leq 1$ として位相特性を主に表現することにし、振幅の方は $W_2$ が表現することにする。

このとき、感度関数の変化を調べてみると、

$$\begin{aligned} S_\Delta &= \frac{1}{1 + (1 + \Delta W_2)CP} = \frac{1}{1 + CP + \Delta W_2 CP} \\ &= \frac{\frac{1}{1 + CP}}{1 + \frac{\Delta W_2 CP}{1 + CP}} = \frac{S}{1 + \Delta W_2 T} \end{aligned} \quad (4.49)$$

となる。そこで、ロバスト性能条件とは、

$$\left\| W_1 \frac{S}{1 + \Delta W_2 T} \right\|_\infty < 1 \quad (4.50)$$

ということになる。ロバスト性能条件と、ロバスト安定条件を同時に実現するには、

$$\left\| W_1 \frac{S}{1+\Delta W_2 T} \right\|_{\infty} < 1 \quad (4.51)$$

$$\|W_2 T\|_{\infty} < 1 \quad (4.52)$$

という二つの不等式を満たす必要がある。(ただし、 $|\Delta| \leq 1$ ) この条件は、1入出力系では、

$$|W_1 S| + |W_2 T| < 1 \quad (4.53)$$

と等価であることを示すことができる。(練習問題としてやってみるとよい。)

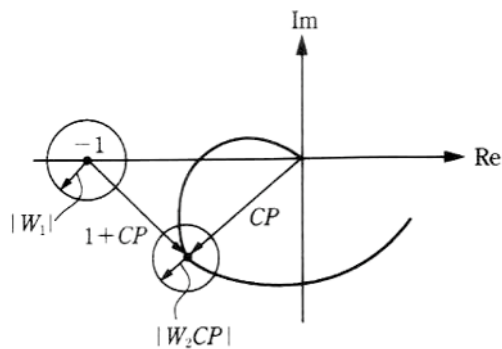


図4.9 ロバスト性能条件

図4.9のナイキスト線図において、系が安定であるためには

$$|W_1| + |W_2 CP| < |1+CP| \quad (4.54)$$

であればよい。これを変形すると、

$$\begin{aligned} \left| \frac{W_1}{1+CP} \right| + \left| W_2 \frac{CP}{1+CP} \right| < 1 \\ \therefore |W_1 S| + |W_2 T| < 1 \end{aligned} \quad (4.55)$$

となる。 $(-1,0)$ の点が半径  $|W_1|$  の円になったのと等価であり、それだけきびしい条件になっていることがわかる。